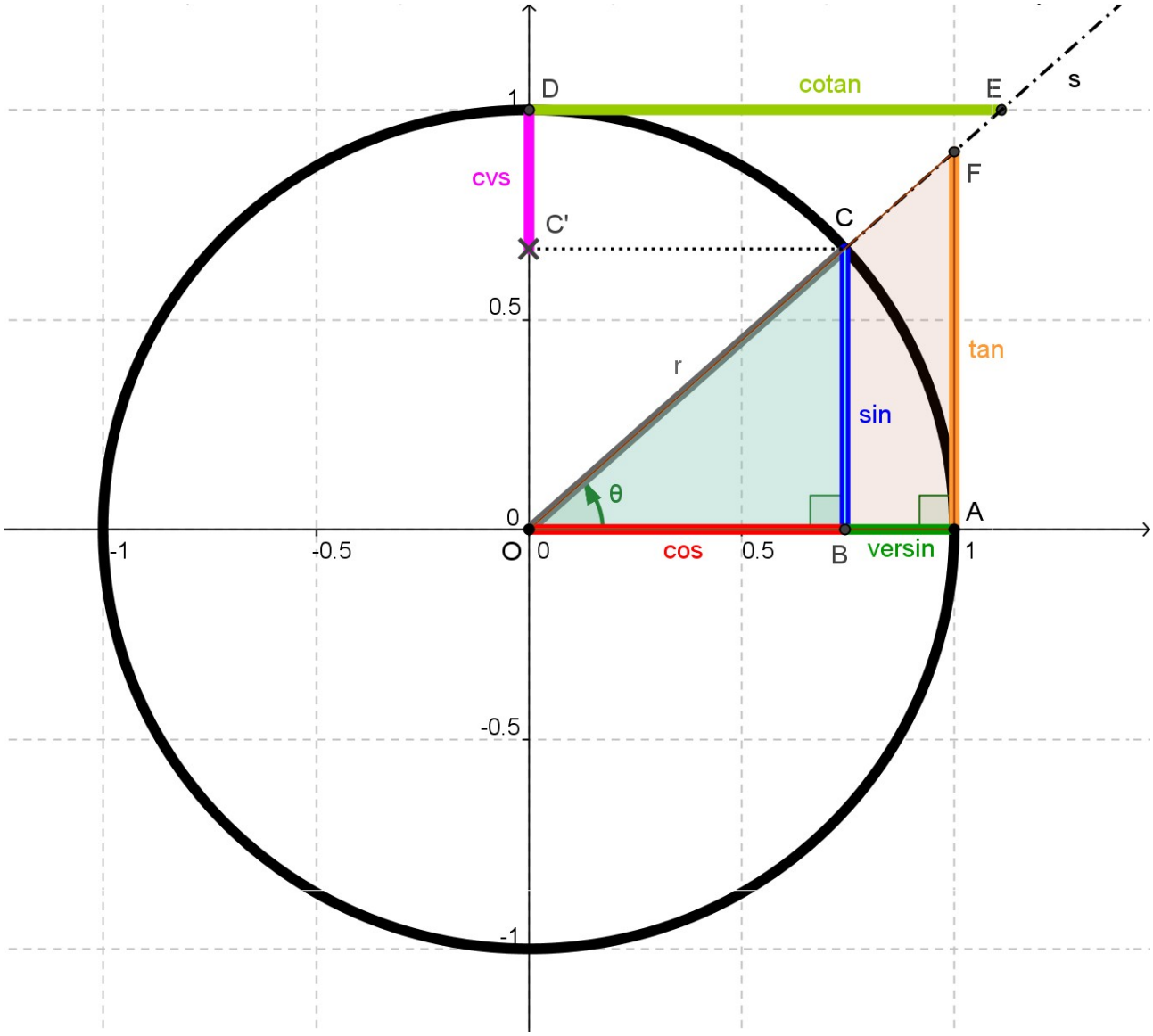
MATEMATICA
III LICEO



WIKIPEDIA
L'enciclopedia libera

CC BY SA

NOTE GENERALI SUL PROGETTO “LIBRI DI TESTO”

Questo è un progetto che avevo in mente di attuare da tempo: provare ad usare il materiale presente su Wikipedia e progetti correlati per creare dei libri di testo liberi per le scuole; tuttavia, a seguito di una discussione che ho intrapreso con altri utenti nel bar di Wikipedia è emerso che a quanto ho capito non esiste più un vero e proprio "programma ministeriale" per le scuole superiori. Ho capito inoltre che oggigiorno ogni scuola va abbastanza per conto suo nella definizione dei programmi di corso, motivo per cui è praticamente impossibile creare dei testi "standard" validi ovunque (e ci sarebbe da chiedersi perchè questa grande "libertà" è spesso correlata ai testi iperspecifici per ogni classe che i docenti adottano per i loro corsi... testi di cui spesso sono anche autori! :D). A questo problema si aggiunge il già citato iperspecialismo di volte voci che in molti casi può dare problemi ed il fatto che i testi sono spesso strutturati da un punto di vista più "didattico".
Ad ogni modo ho deciso comunque di proseguire il progetto per una serie di ragioni che illustro qui sotto, creando solo i testi del Liceo Classico da utilizzare come esempio pratico:

•fornire dei testi utilizzabili in quei contesti ove i testi "ufficiali" siano troppo costosi (es. terzo mondo)
•dimostrare la fattibilità del progetto a grandi linee
•fornire una critica all'attuale sistema di creazione dei programmi di corso e dei libri di testo scolastici. Davvero la "libertà editoriale" come è propagandata oggi tutela gli studenti e le famiglie? (Non dico che bisogna tornare al "testo unico" del ventennio, ma sarebbe interessante quantomeno studiare i conflitti di interesse nella creazione e nell'utilizzo dei testi)
•mostrare come la "massa" possa autogestire la creazione dei testi scolastici indipendentemente dagli editori e fornendo testi di qualità e gratuiti, oltre che più aderenti ad un punto di vista neutrale.
Per vari testi liberi relativi alla Letteratura Italiana, antica e straniera per tutti gli anni del corso si rimanda al progetto WikiSource o ad archive.org.

Galati Antonello

WIKIPEDIA

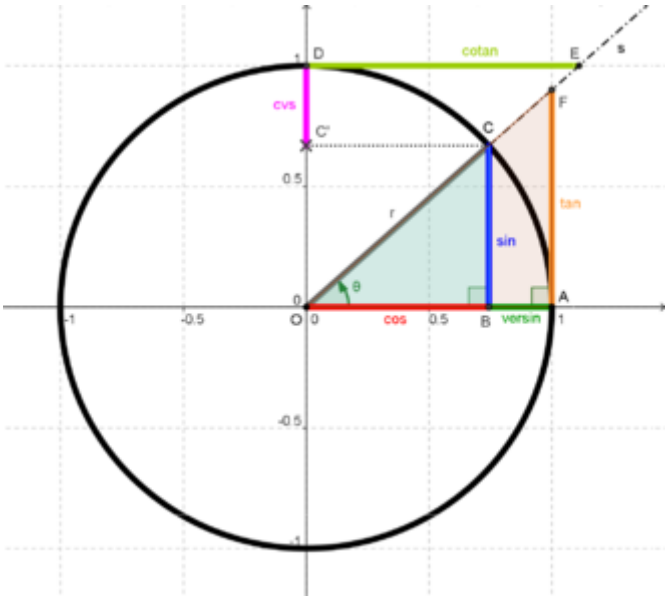
Seno (matematica)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, in particolare in trigonometria, dato un triangolo rettangolo il **seno** di uno dei due angoli interni adiacenti all'ipotenusa è definito come il rapporto tra le lunghezze del cateto opposto all'angolo e dell'ipotenusa.

Più in generale il seno di un angolo α, espresso in gradi o radianti, è una quantità che dipende solo da α, costruita usando la circonferenza unitaria.

Definendo come $\sin x$ il seno nell'angolo x si ottiene la **funzione seno**, una funzione trigonometrica di fondamentale importanza nell'analisi matematica. In ambito italiano questa funzione viene spesso indicata con $\operatorname{sen} x$.



Dato un triangolo rettangolo, il seno di un angolo acuto è definito come il rapporto tra le lunghezze del cateto opposto all'angolo e dell'ipotenusa

Indice

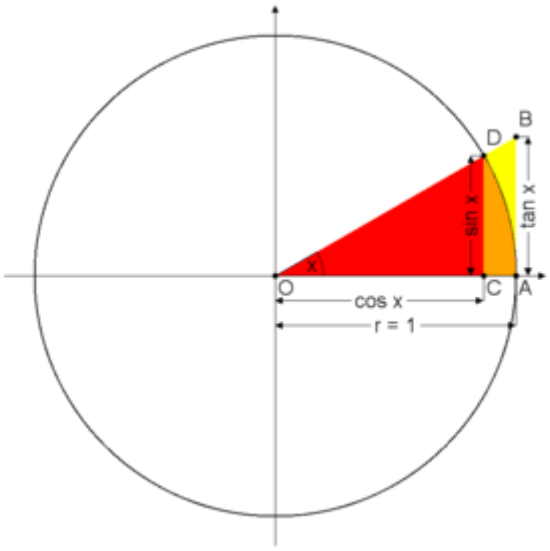
Definizione
Funzione seno
Seno e coseno
Proprietà analitiche della funzione seno
Equazioni fondamentali relative al seno
Definizioni correlate
Altre proprietà
Storia e origine del nome
Note
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Definizione

Nel triangolo rosso in figura, il seno di x è dato da

$$\sin x = \overline{DC}$$

Più in generale si definisce il seno di un angolo x a partire dalla circonferenza goniometrica, ovvero dalla circonferenza di raggio unitario nel piano cartesiano. Presa la semiretta uscente dall'origine che forma un angolo x con l'asse delle ascisse come in figura, il seno dell'angolo è quindi definito come il valore della coordinata y del punto di intersezione tra la semiretta e la circonferenza (in figura, è la lunghezza del segmento CD).



Il dominio della funzione seno è l'insieme dei numeri reali, mentre l'immagine è l'intervallo reale $[-1;+1]$, ossia applicando tale funzione a tutti i numeri reali si ottengono tutti i numeri reali compresi tra -1 e $+1$, estremi inclusi.

La tabella seguente elenca i principali valori notevoli assunti dalla funzione seno:[1][2]

x in radianti	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x in gradi	0°	15°	18°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	0	-1	0

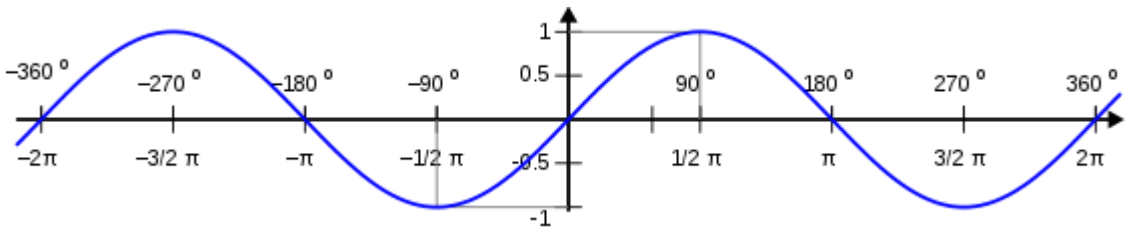
Nei testi di matematica il seno di x è solitamente indicato con la notazione $\sin x$ oppure $\operatorname{sen} x$, ove $\sin$ è un'abbreviazione del latino sinus usata anche nei paesi di lingua inglese.

Esiste un'altra definizione di seno che si collega alle rotazioni: il seno di un angolo x è la componente lungo l'asse delle ordinate del versore i, versore dell'asse delle ascisse, ruotato di x.

Funzione seno

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Sinusoide***.

La funzione seno è definita associando ad x il seno dell'angolo x in radianti, ed è indicata con $\sin x$. Poiché x e $x + 2\pi$ definiscono lo stesso angolo, la funzione seno è una funzione periodica di periodo 2π, dove 2π è l'angolo giro.



Rappresentazione grafica della funzione seno

Disegno *y* = sin *x* usando il cerchio trigonometrico unitario.

Seno e coseno

Tra seno e coseno esiste la relazione fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

che è conseguenza del teorema di Pitagora. Infatti nel triangolo OCD nella seconda figura il coseno di x è definito come

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}.$$

D'altra parte il teorema di Pitagora applicato al triangolo OCD fornisce la relazione

$$\overline{DC}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2,$$

e quindi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{\overline{DC}}{\overline{OD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}\right)^2 = \frac{\overline{DC}^2 + \overline{OC}^2}{\overline{OD}^2} = \frac{\overline{OD}^2}{\overline{OD}^2} = 1.$$

Vale anche la relazione:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Come per il coseno, la cosecante di un angolo è 1 diviso il seno dell'angolo.

Proprietà analitiche della funzione seno

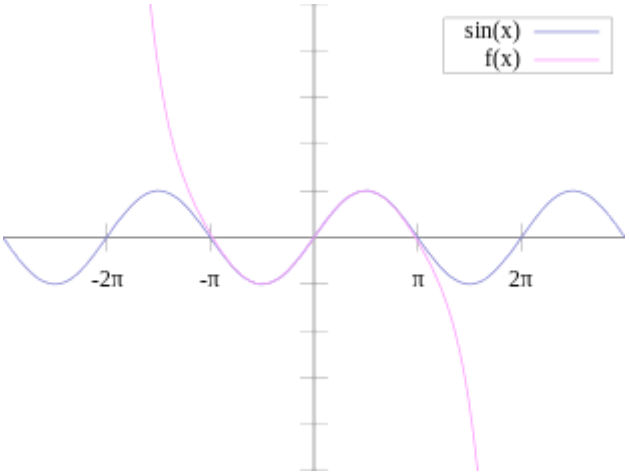
La derivata della funzione seno è la funzione coseno:[3]

$$\sin' x = \cos x.$$

La derivata seconda è invece

$$\sin'' x = -\sin x.$$

La funzione seno è una funzione analitica, la cui espansione in serie di Taylor è



La funzione seno (blu) e la sua approssimazione data dal polinomio di Taylor di 7º grado (rosa).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

In analisi matematica questa uguaglianza è spesso usata per definire il seno. La stessa serie definisce il seno come funzione olomorfa su tutto il piano complesso.

Equazioni fondamentali relative al seno

Seguono alcune equazioni fondamentali riguardanti la funzione seno:[4]

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

con l'aggiunta della condizione che:

$$0 < x \cos x < \sin x < x \text{ per } 0 < x < 1.$$

Esiste anche un'identità trigonometrica che mette in relazione la funzione seno alla funzione tangente:

$$\sin x = \frac{2\tau}{1+\tau^2}, \quad \text{con} \quad \tau = \tan\frac{x}{2}.$$

Questa identità si rivela di fondamentale importanza nella risoluzione di equazioni goniometriche in cui l'incognita figuri come argomento sia di un seno sia di un coseno o di funzioni derivate da queste. Esiste infatti un'analoga identità per quanto riguarda il coseno e l'uso congiunto di queste due identità permette la risoluzione dell'equazione nell'incognita τ.

Definizioni correlate

Il reciproco del seno, definito dove il seno è diverso da zero, è la cosecante:[5]

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

La funzione seno ristretta all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ come dominio e con codominio $[-1, 1]$ è biettiva, e quindi ha un'inversa, chiamata arcoseno e indicata con $\arcsin$ o con $\sin^{-1}$ che riprende la notazione della funzione inversa.[6] Per definizione si ha quindi:

$$x = \arcsin y \iff y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Altre proprietà

Dalla formula di Eulero si deduce che la funzione seno è in relazione con la funzione esponenziale e con la funzione seno iperbolico. Infatti per ogni numero reale x si ha

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{\sinh(ix)}{i}$$

Alcune formule particolari riguardanti la funzione seno coinvolgono l'operazione di prodotto.

Per esempio risulta per ogni intero $n \geq 2$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

In analisi complessa, applicando teorema di fattorizzazione di Weierstrass alla funzione seno, la si può esprimere come prodotto infinito, mediante la seguente formula che vale per ogni numero complesso z

$$\sin z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

Un altro prodotto infinito mette in relazione il seno e il coseno:

$$\sin z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$

La funzione seno è anche in relazione con alcune funzioni speciali, come si evince, per esempio, dalla formula di riflessione della funzione Gamma

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

e dall'equazione funzionale soddisfatta dalla funzione zeta di Riemann

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

Un'altra relazione tra funzione seno e funzione Gamma è data dal seguente integrale definito, valido per $n > 1$:[7]

$$\int_0^\infty \sin(x^n)dx = \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Infine, mediante la formula della frazione continua di Eulero è possibile esprimere la funzione seno sotto forma di frazione continua:[7][8]

$$\sin x = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{(2\cdot 3-x^2)+\cfrac{2\cdot 3\,x^2}{(4\cdot 5-x^2)+\cfrac{4\cdot 5\,x^2}{(6\cdot 7-x^2)+\ddots}}}}$$

Storia e origine del nome

Il concetto di seno fu introdotto dal matematico e astronomo indiano Aryabhata I (in devanāgarī: आर्यभट) nella sua opera *Aryabhatiya* (499).[9]

Il seno è per definizione la metà di una *corda*, cioè un segmento che unisce due punti (detti *estremi*) di una circonferenza. In sanscrito, "metà corda" è reso con *jya-ardha*, a volte sostituito con *ardha-jya* e abbreviato in *jya* "corda". Questo termine fu importato nella lingua araba come *jiba*, un termine senza significato prima di allora, ma che rifletteva la pronuncia del nome *jya*. Secondo le regole della lingua araba, questo nome venne scritto con le due consonanti *jb*, senza vocali. Successivamente, quando i traduttori occidentali attinsero alle fonti arabe, interpretarono la parola *jb* come *jaib*, il cui significato era "baia". Infine l'italiano Gherardo da Cremona (1114 - 1187) tradusse la parola in latino come *sinus*, il cui significato era appunto "baia".

Note

1. ^ *Valori delle funzioni goniometriche*, su *youmath.it*, YouMath. URL consultato il 19 ottobre 2016.
2. ^ *esercizimatematica.com*, https://www.esercizimatematica.com/tabella-seno-coseno-con-tutti-gli-angoli/.
3. ^ *Derivata del seno*, su *youmath.it*, YouMath. URL consultato il 19 ottobre 2016.
4. ^ *Formule trigonometriche*, su *youmath.it*, YouMath. URL consultato il 19 ottobre 2016.
5. ^ *secante*, in *Enciclopedie on line*, Treccani. URL consultato il 19 ottobre 2016.
6. ^ *arcoséno*, in *Enciclopedie on line*, Treccani. URL consultato il 19 ottobre 2016.
7. *Wolfram Mathworld - Sine*, su *mathworld.wolfram.com*. URL consultato il 9 aprile 2020.
8. ^ *Mauro Fiorentini - Funzioni espresse tramite frazioni continue*, su *bitman.name*. URL consultato il 10 aprile 2020.
9. ^ *Aryabhata*, su *pls.dima.unige.it*. URL consultato il 19 ottobre 2016.

Voci correlate

- Funzione trigonometrica
- Sinusoide
- Coseno
- Tangente (matematica)

- Arcoseno
- Circonferenza goniometrica
- Formula di Eulero
- Formule di duplicazione
- Formule di bisezione
- Formule di prostaferesi
- Formule di Werner
- Teorema dei seni
- Funzione periodica
- Funzione alternata
- Seno iperbolico
- Muḥammad ibn Jābir al-Ḥarrānī al-Battānī

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sul **seno (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Sine_function?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Seno*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Seno*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 64504 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=64504)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Seno_(matematica)&oldid=131968714"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 9 feb 2023 alle 13:05.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Coseno

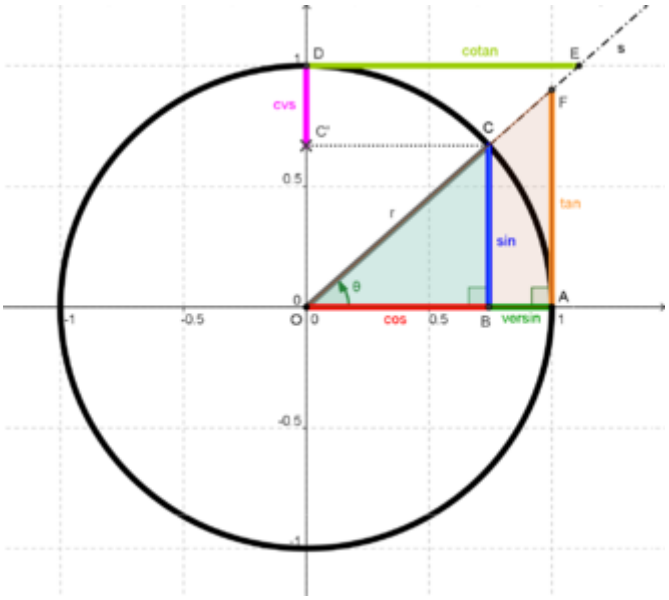
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, in particolare in trigonometria, dato un triangolo rettangolo, il **coseno** di uno dei due angoli interni adiacenti all'ipotenusa è definito come il rapporto tra le lunghezze del cateto adiacente all'angolo e dell'ipotenusa.

Più in generale, il coseno di un angolo α, espresso in gradi o radianti, è una quantità che dipende solo da α, costruita usando la circonferenza unitaria.

Definendo come $\cos(x)$ il valore del coseno nell'angolo x, si ottiene la funzione coseno, una funzione trigonometrica di fondamentale importanza nell'analisi matematica.

Si potrebbe ulteriormente affermare che il coseno è l'ascissa dell'estremo P calcolata rispetto al suo raggio unitario (della circonferenza goniometrica) Da ciò si può dedurre che:



Dato un triangolo rettangolo, il coseno di un angolo acuto è definito come il rapporto tra le lunghezze del cateto adiacente all'angolo e dell'ipotenusa

- per i valori compresi tra 0º e 90º il coseno del punto P diminuisce;
- per i valori compresi tra 90º e 180º il coseno del punto P diminuisce;
- per i valori compresi tra 180º e 270º il coseno del punto P aumenta;
- per i valori compresi tra 270º e 360º il coseno del punto P aumenta.

Indice

Definizione

Funzione coseno

Coseno e seno

Proprietà analitiche del coseno

Equazioni fondamentali relative al coseno

Definizioni correlate

Altre proprietà

Origine del nome

Note

Bibliografia

Voci correlate

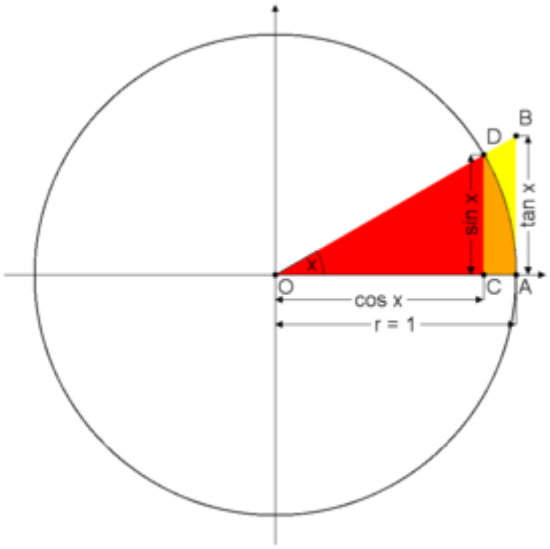
Altri progetti
Collegamenti esterni

Definizione

Nel triangolo rosso in figura, il coseno di x è dato da

$$\cos x = \overline{OC}.$$

Più in generale, si definisce il coseno prendendo una circonferenza di raggio unitario e la semiretta uscente dall'origine che forma un angolo x con l'asse delle ascisse come in figura. Il coseno dell'angolo x è quindi definito come il valore della coordinata x del punto di intersezione tra la prima semiretta e la circonferenza (in figura, è la lunghezza del segmento OC).



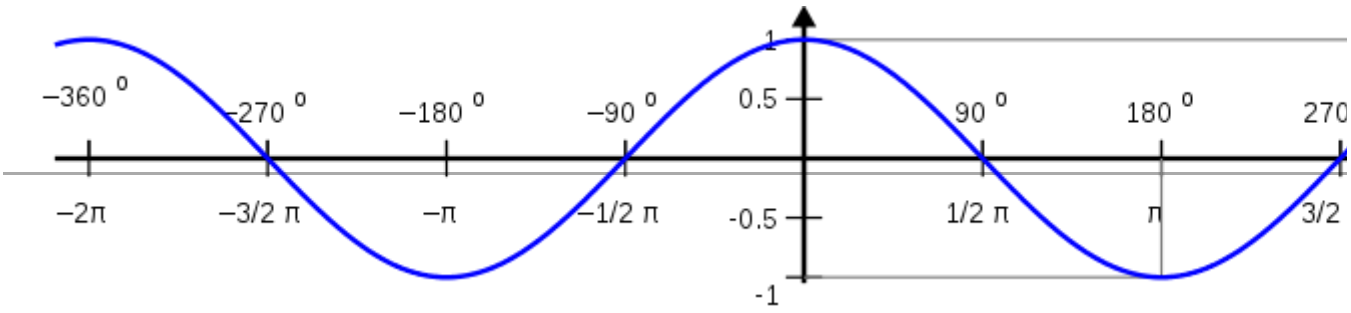
La tabella seguente elenca i principali valori notevoli assunti dalla funzione coseno:[1][2]

x in radianti	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x in gradi	0°	15°	18°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	-1	0	1

Esiste un'ulteriore definizione di coseno in relazione alle rotazioni: il coseno di un angolo x è la componente lungo l'asse delle ascisse del versore i, versore dell'asse x, ruotato di x.

Funzione coseno

La funzione coseno è definita associando a x il coseno dell'angolo x (rappresentato in radianti), ed è indicata con $f(x) = \cos x$. Poiché x e $x + 2k\pi$ definiscono lo stesso angolo per qualsiasi k intero, la funzione coseno è una funzione periodica di periodo 2π. La curva del grafico di questa funzione viene denominata cosinusoide.[3] L'insieme di variabilità della funzione coseno è $[-1, 1]$, ossia applicando tale funzione a qualunque numero reale si ottiene sempre un numero reale compreso tra -1 e 1, estremi inclusi.



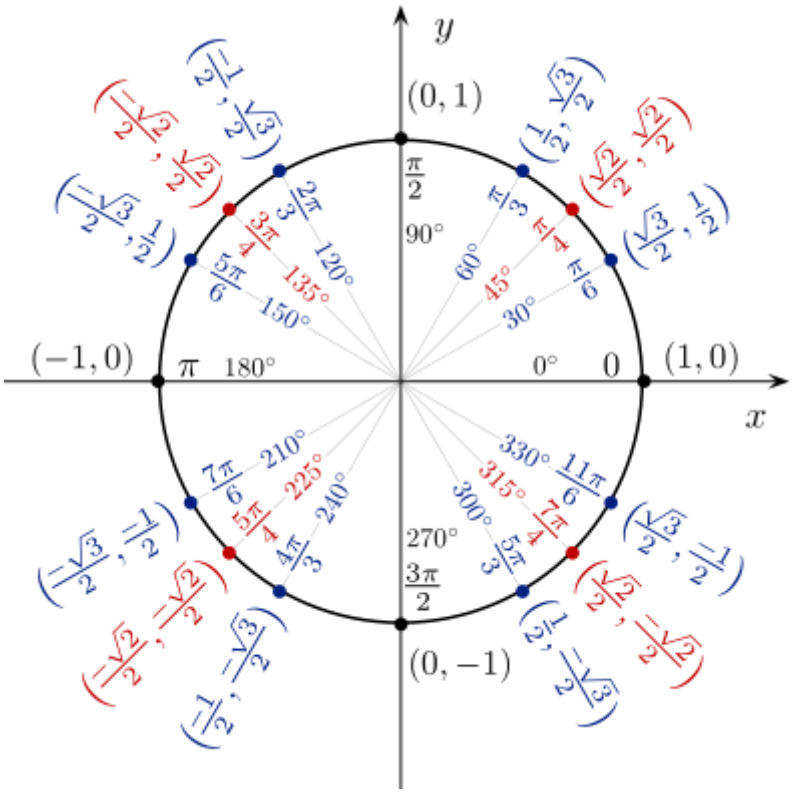
Rappresentazione grafica di una cosinusoide.

Coseno e seno

Tra seno e coseno esiste la relazione fondamentale, detta prima relazione (o legge) fondamentale della trigonometria:[4]

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

che è conseguenza del teorema di Pitagora.



Valori principali (coseno, seno)

Proprietà analitiche del coseno

La derivata della funzione coseno è l'opposto della funzione seno.[5][6]. Si ha cioè:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Questo può essere dimostrato applicando una formula di prostaferesi per calcolare il limite del rapporto incrementale del coseno:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\xrightarrow[h\to 0]{} -\sin x$$[7].

La derivata seconda del coseno è la funzione stessa cambiata di segno:

$$(\cos x)'' = -\cos x,$$

pertanto, la funzione coseno (così come la funzione seno) risolve l'equazione differenziale

$$y'' + y = 0,$$

che descrive il moto di un oscillatore armonico ideale libero.

La funzione coseno è una funzione a derivate equilimitate (si ha infatti $|y^{(k)}| \leq 1$ per ogni k), ed è pertanto analitica; la sua espansione in serie di Taylor è:[8]

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

per ogni x reale.

In analisi matematica questa uguaglianza è spesso usata per definire il coseno. La stessa serie definisce il coseno come funzione olomorfa su tutto il piano complesso.

La primitiva del coseno è il seno, ossia:

$$\int \cos x dx = \sin x + c.$$

Equazioni fondamentali relative al coseno

Vale la seguente formula di *addizione* (e *sottrazione*) *di archi*:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

e in particolare la *formula di duplicazione*

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

La formula di bisezione per il coseno è:[9]

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Le seguenti sono le formule di prostaferesi relative al coseno:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Vale anche la catena di diseguaglianze:

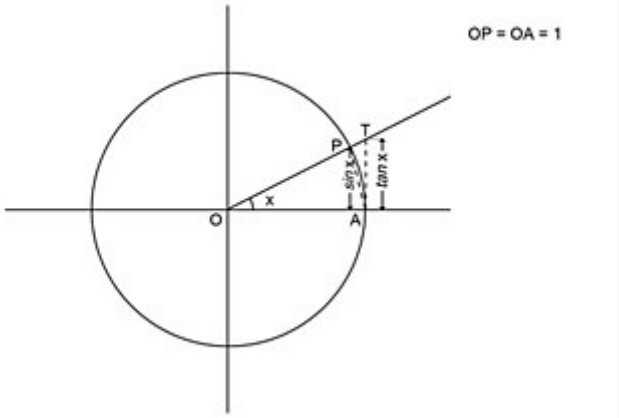
$$0 < x\cos x < \sin x < x \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione

Si consideri la circonferenza unitaria, e sia $0 < x < \pi/2$, come in figura.

Si tracci la semiretta uscente dall'origine che forma un angolo x (antiorario) rispetto al semiasse positivo delle ascisse. Allora le coordinate del punto di intersezione P della semiretta con la circonferenza sono $(\cos x, \sin x)$. Si tracci il segmento che unisce P al punto

$A = (1, 0)$. Sia inoltre T il punto di intersezione tra la semiretta e la retta di ascissa 1 (asse delle tangenti). T ha coordinate $(1, \tan x)$.



Notiamo che il triangolo POA è strettamente racchiuso nel settore circolare POA, il quale a sua volta è racchiuso strettamente nel triangolo TOA. Vale allora la diseguaglianza delle rispettive aree (si ricordi che x è l'angolo, espresso in radianti):

$$0 < \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x},$$

ossia

$$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Dalla prima parte della diseguaglianza si ricava che $0 < \sin x < x$, mentre manipolando la seconda, dividendo cioè per $\sin x$ (il che è possibile perché $\sin x > 0$), si ha che:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ossia

$$\sin x \cos x < x \cos x < \sin x,$$

dove alla fine si è moltiplicato per $\sin x$ e per $\cos x$, il che preserva il verso della disuguaglianza perché sono entrambi positivi. Ricapitolando i risultati,

$0 < x \cos x < \sin x < x.$

Q.E.D..

Esiste anche un'identità trigonometrica che relaziona la funzione coseno alla funzione tangente:

$$\cos x = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \text{con} \quad \tau = \tan\frac{x}{2}$$ [10].

Questa identità, chiamata *formula parametrica* si rivela di fondamentale importanza nella risoluzione di equazioni goniometriche in cui l'incognita figuri come argomento sia di un seno sia di un coseno (o di funzioni derivate da queste). Esiste, infatti, un'analoga identità per quanto riguarda il seno, il che permette la risoluzione dell'equazione nell'incognita τ. Allo stesso modo, si può sfruttare questa relazione per il calcolo delle primitive di funzioni goniometriche.

Definizioni correlate

Il reciproco del coseno (definito dove il coseno è diverso da zero) è la secante:[11]

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

La funzione coseno è iniettiva sull'intervallo $[0, \pi]$ e ha quindi una inversa, chiamata arcocoseno (indicato con $\arccos$ o con $\cos^{-1}$ che riprende la notazione della funzione inversa).[12]

Altre proprietà

Dalla formula di Eulero si deduce che la funzione coseno è in relazione con la funzione esponenziale e con la funzione coseno iperbolico. Infatti, per ogni numero reale x si ha

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh(ix).$$

In analisi complessa, applicando teorema di fattorizzazione di Weierstrass alla funzione coseno, la si può esprimere come prodotto infinito, mediante la seguente formula che vale per ogni numero complesso z

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{\pi^2 (2n-1)^2}\right].$$

Un altro prodotto infinito mette in relazione il seno e il coseno:

$$\sin z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right).$$

Esiste anche una relazione tra funzione coseno e funzione Gamma data dal seguente integrale definito, valido per $n > 1$:[13]

$$\int_0^{\infty} \cos(x^n) dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Infine, mediante la formula della frazione continua di Eulero è possibile esprimere la funzione coseno sotto forma di frazione continua:[14]

$$\cos x = 1 - \cfrac{x^2}{1 \cdot 2 + \cfrac{1 \cdot 2\, x^2}{(3 \cdot 4 - x^2) + \cfrac{3 \cdot 4\, x^2}{(5 \cdot 6 - x^2) + \cfrac{5 \cdot 6\, x^2}{(7 \cdot 8 - x^2) + \ddots}}}}.$$

Origine del nome

Il termine *coseno* deriva dal latino *complementi sinus* "seno del(l'angolo) complementare".[15] Infatti, per angoli tra 0 e $\pi/2$, il coseno di un angolo è il seno dell'angolo complementare, cioè

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right).$$

Questa relazione, che si ricava dalle formule di somma di archi, è valida per ogni x; tuttavia la nozione geometrica di angolo complementare si applica solo ad angoli positivi, e quindi compresi tra 0 e $\pi/2$.

L'origine del nome *seno* (inteso nel senso di baia) risale a sua volta a una errata traduzione di un termine arabo.

Note

1. ^ *Valori delle funzioni goniometriche*, su *youmath.it*, YouMath. URL consultato il 19 ottobre 2016.
2. ^ *esercizimatematica.com*, https://www.esercizimatematica.com/tabella-seno-coseno-con-tutti-gli-angoli/.
3. ^ *cosinusoide*, in *Dizionario delle Scienze Fisiche*, Treccani, 1996. URL consultato il 19 ottobre 2016.
4. ^ *Formule trigonometriche*, su *youmath.it*, YouMath. URL consultato il 19 ottobre 2016.
5. ^ *Derivata del coseno*, su *youmath.it*, YouMath. URL consultato il 19 ottobre 2016.
6. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 5*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0433-4. p.283
7. ^ .L'ultimo passaggio fa uso del limite notevole:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

   che si può dimostrare geometricamente.
8. ^ Carla Maderna e Paolo Maurizio Soardi, *Lezioni di Analisi Matematica*, CittàStudi Edizioni - Milano, 1995, ISBN 88-251-7090-4. p.238
9. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.245
10. ^ Infatti si ha, in virtù dell'unità goniometrica e dividendo per $\cos x$ (purché non sia nullo), l'identità

    $$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

11. ^ *secante*, in *Enciclopedie on line*, Treccani. URL consultato il 19 ottobre 2016.
12. ^ *arcocoséno*, in *Enciclopedie on line*, Treccani. URL consultato il 19 ottobre 2016.
13. ^ *Wolfram Mathworld - Cosine*, su *mathworld.wolfram.com*. URL consultato il 9 aprile 2020.
14. ^ *Mauro Fiorentini - Funzioni espresse tramite frazioni continue*, su *bitman.name*. URL consultato il 10 aprile 2020.
15. ^ coseno in "Dizionario delle Scienze Fisiche" (http://www.treccani.it/enciclopedia/coseno_%28Dizionario-delle-Scienze-Fisiche%29/)

Bibliografia

- Maderna C. e Soardi P.M., *Lezioni di Analisi Matematica*, CittàStudi Edizioni - Milano, 1995, ISBN 88-251-7090-4.
- Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 5*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0433-4.

- Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7.

Voci correlate

- Seno (matematica)
- Legge del coseno
- Cosinusoide
- Funzione trigonometrica
- Tangente (matematica)
- Arcocoseno
- Circonferenza goniometrica
- Formula di Eulero
- Formule di duplicazione
- Formule di bisezione
- Formule di prostaferesi
- Formule di Werner
- Funzione periodica
- Funzione alternata
- Coseno iperbolico

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**coseno**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sul **coseno (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cosine_function?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (**EN**) *Coseno*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (**EN**) Eric W. Weisstein, *Coseno*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Coseno&oldid=131968465"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 9 feb 2023 alle 12:51.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Tangente (matematica)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, in particolare in trigonometria, la **tangente** è una funzione trigonometrica definita come la proiezione sull'asse y del punto di incontro tra il prolungamento del secondo lato dell'angolo orientato e la retta che tange la circonferenza goniometrica nel punto $(1, 0)$; molto spesso è anche definita come il rapporto tra il seno e il coseno del medesimo angolo. Convenzionalmente tale funzione viene indicata come *tan* (più raramente *tg*)[1].

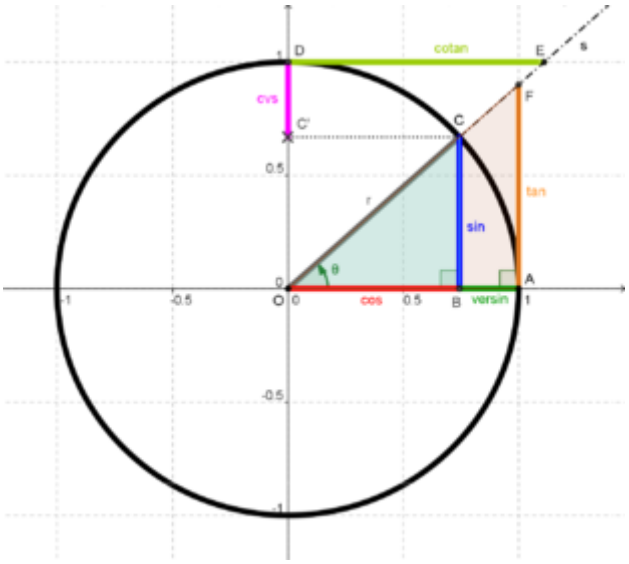


Figura 1. Dato un triangolo rettangolo, la tangente di un angolo è definita come il rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo

Indice

- Proprietà
- Geometria analitica
- Analisi matematica
- Seno e coseno
- Applicazioni
- Origine del nome
- Note
- Bibliografia
- Voci correlate
- Altri progetti
- Collegamenti esterni

Proprietà

Se osserviamo la figura 2 vediamo che i triangoli OAB e OCD sono simili, quindi:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{DC}{OC}; \qquad \frac{\tan x}{1} = \frac{DC}{OC}$$

espressione che giustifica graficamente la definizione trigonometrica della tangente[2].

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La tangente è una funzione periodica con periodo pari a π radianti cioè[3]:

$$\tan x = \tan(x + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La derivata prima della tangente è[4]:

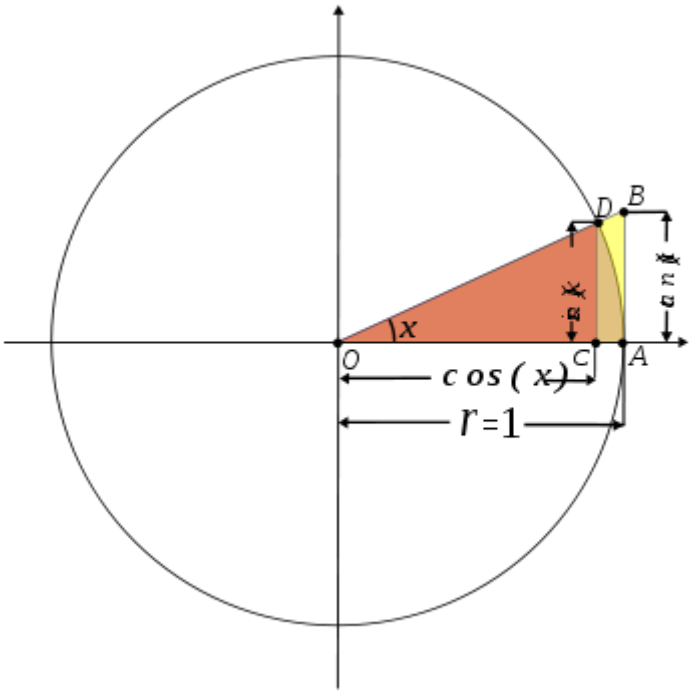


Figura 2. Funzioni trigonometriche sulla circonferenza goniometrica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

mentre la sua funzione primitiva è:

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c.$$

Lo sviluppo di Taylor della funzione tangente arrestato al settimo ordine è:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8).$$

La tangente è una funzione dispari, cioè[5]:

$$\tan(-x) = -\tan x,$$

e la sua funzione inversa prende il nome di arcotangente[6].

Il reciproco della tangente è detto cotangente[7]: $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

La tabella seguente elenca i principali valori notevoli assunti dalla funzione tangente:

α in radianti	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
α in gradi	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
$\tan(\alpha)$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

La funzione $\tan\alpha$ non esiste in angoli di valore[3] $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, ed è continua nel suo dominio.

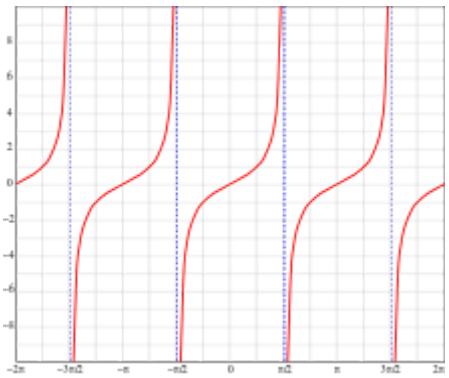


Figura 3. La tangentoide

Geometria analitica

Ricordando che il coefficiente angolare di una retta passante per due punti di coordinate $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ è esattamente $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$[8], si ha che tale rapporto equivale a quello tra il seno e il coseno dell'angolo compreso tra la retta e l'asse delle x; otteniamo così la relazione:

$$\tan\alpha = m = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}.$$

Analisi matematica

Ricordando che la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto, è possibile affermare che tale derivata è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la retta tangente alla funzione forma con l'asse x:[9]

$$f'(x_0) = m = \tan\alpha.$$

Seno e coseno

Per ottenere i valori del seno e del coseno di α conoscendone la tangente possiamo fare un semplice ragionamento. Innanzitutto pensiamo $\tan\alpha$ come il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un punto P sulla circonferenza centrata nell'origine O degli assi (il raggio è ininfluente poiché il valore della tangente è univocamente determinato). Possiamo considerare queste ascissa e ordinata come i cateti del triangolo rettangolo che ha il raggio OP come ipotenusa. Da questo punto di vista il seno di α è il rapporto tra l'ordinata di P e l'ipotenusa OP, mentre il coseno di α è il rapporto tra l'ascissa di P e l'ipotenusa OP.

Applicando il teorema di Pitagora possiamo dire, dato

$$\tan\alpha = \frac{a}{b},$$

che:

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Applicazioni

In un triangolo rettangolo la tangente di un angolo acuto è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo acuto considerato e l'altro cateto[10].

Origine del nome

Il nome deriva dal fatto che può esser definita come la lunghezza di un segmento della tangente (in senso geometrico) alla circonferenza goniometrica. Infatti, data una circonferenza goniometrica (di raggio unitario), la tangente di un angolo α è l'ordinata del punto di intersezione tra il secondo lato (o il suo prolungamento) dell'angolo in posizione normale (il vertice dell'angolo coincide con l'origine degl'assi cartesiani e il primo lato coincide con il semiasse positivo delle ascisse) e la retta tangente alla circonferenza nel punto di coordinate (1,0).

Note

1. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.168
2. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.169
3. Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.179
4. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Corso Base Blu di Matematica-Volume 5*, Zanichelli, 2009, ISBN 978-88-08-03933-0. p.V18
5. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.180
6. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.187
7. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.182
8. ^ Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, *Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra*, Ghisetti e Corci Editori, 1995, ISBN 88-801-3173-7. p. 233
9. ^ Carla Maderna e Paolo M. Soardi, *Lezioni di Analisi Matematica*, CittàStudi Edizioni - Milano, 1995, ISBN 88-251-7090-4. p. 206
10. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7. p.376

Bibliografia

- Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7.
- Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Corso Base Blu di Matematica-Volume 5*, Zanichelli, 2009, ISBN 978-88-08-03933-0.
- Carla Maderna e Paolo M. Soardi, *Lezioni di Analisi Matematica*, CittàStudi Edizioni - Milano, 1995, ISBN 88-251-7090-4.
- Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, *Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra*, Ghisetti e Corvi Editori, 1995, ISBN 88-801-3173-7.

Voci correlate

- Funzioni trigonometriche

- Arcotangente
- Cotangente
- Tangente iperbolica
- Tangente (geometria)
- Trigonometria

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**tangente**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sulla **tangente (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Tangent_function?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (**EN**) *Tangente*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (**EN**) Eric W. Weisstein, *Tangente*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- *Math.it: la tangente in goniometria*, su *math.it*. URL consultato il 29 novembre 2007 (archiviato dall'url originale il 15 novembre 2007).

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Tangente_(matematica)&oldid=132934015"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 10 apr 2023 alle 18:33.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Identità trigonometrica

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Un'**identità trigonometrica** è un'identità matematica che coinvolge le funzioni trigonometriche.

Le identità trigonometriche sono utilizzate per semplificare molte espressioni contenenti funzioni trigonometriche (come, ad esempio, nella risoluzione di equazioni trigonometriche) e per il calcolo di molti integrali; talvolta, anche integrali di funzioni non trigonometriche possono essere calcolati mediante opportuni cambiamenti di variabile che utilizzano una funzione trigonometrica per portare a decisive semplificazioni.

Notazioni: Per denotare la funzione inversa del seno talora si usa $\sin^{-1}(x)$; qui preferiamo usare $\arcsin(x)$ e scrivere $\csc(x)$ per denotare la inversa moltiplicativa della funzione seno.

Indice

Definizioni
Periodicità, simmetria e traslazioni
Conseguenze del teorema di Pitagora
Formule di addizione e sottrazione
Formula di duplicazione
Formule per gli angoli multipli
Formule di riduzione della potenza
Formule di bisezione
Prodotti espressi mediante somme
Somme espresse mediante prodotti
Funzioni trigonometriche inverse
Funzione gudermanniana
Identità per angoli costanti
Calcolo infinitesimale
Dimostrazioni usando un'equazione differenziale
Dimostrazioni geometriche
- Formula di addizione del seno
- Formula di addizione del coseno

Punti di vista astratti
Note
Voci correlate
Altri progetti

Definizioni

Si definiscono le seguenti funzioni trigonometriche:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)} \qquad \csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}$$

Periodicità, simmetria e traslazioni

Queste formule si ricavano facilmente dalle definizioni sulla circonferenza trigonometrica.

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \qquad \sin(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \qquad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\tan(x) = \tan(x + \pi) \qquad \tan(x) = -\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \cot(-x) = -\cot(x)$$

Molti modelli fisici si basano sul fatto che qualsiasi combinazione lineare d'onde sinusoidali con lo stesso periodo ma di differenti fasi è ancora un'onda sinusoidale dello stesso periodo, ma con una nuova fase. Precisamente:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi),$$

dove

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(b/a), & \text{se } a \geq 0; \\ \pi + \arctan(b/a), & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Conseguenze del teorema di Pitagora

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$

Formule di addizione e sottrazione

La scoperta delle prime due identità (dalle quali seguono anche le altre) risale a Tolomeo[1] ma per fornire una dimostrazione più veloce è possibile utilizzare le formule di Eulero attraverso la funzione $\mathbf{cis}$. Una dimostrazione geometrica dell'identità per $\sin(x + y)$ è data alla fine di questa voce.

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)}$$

$$\operatorname{cis}(x + y) = \operatorname{cis}(x)\operatorname{cis}(y)$$

$$\operatorname{cis}(x - y) = \frac{\operatorname{cis}(x)}{\operatorname{cis}(y)}$$

dove

$$\operatorname{cis}(x) := e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Formula di duplicazione

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Formule di duplicazione***.

Queste possono essere ottenute sostituendo $x = y$ nei teoremi di addizione, e utilizzando il teorema di Pitagora per le ultime due. Ancor meglio utilizzare la formula di De Moivre con $n = 2$.

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot^2(x) - 1}{2\cot(x)}$$

Formule per gli angoli multipli

Se denotiamo T_n l'n-esimo polinomio di Chebyshev, allora

$$\cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

Formula di De Moivre:

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

Il **nucleo di Dirichlet** $D_n(x)$ è la funzione che si trova da entrambe le parti della seguente identità:

$$1 + 2\cos(x) + 2\cos(2x) + 2\cos(3x) + \cdots + 2\cos(nx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.$$

La convoluzione di ogni funzione quadrato sommabile periodica di periodo 2π con il nucleo di Dirichlet coincide con la somma troncata di ordine n della sua serie di Fourier.

Formule di riduzione della potenza

Dalla formula di duplicazione del coseno e dalla formula trigonometrica di Pitagora si ottiene

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Formule di bisezione

Sostituendo $\frac{x}{2}$ al posto di x nelle formule di riduzione della potenza, e calcolando $\cos\frac{x}{2}$ e $\sin\frac{x}{2}$ si ottiene.

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1+\cos(x)}{2}\right)}$$

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1-\cos(x)}{2}\right)}$$

Da queste ultime due identità, dividendo membro a membro la seconda per la prima, si ottiene:

$$\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$$

Tuttavia, è possibile giungere a due espressioni per $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ senza il valore assoluto, che sono le seguenti:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Dimostrazione

Moltiplicare $\tan\frac{x}{2}$ per $\frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$ e sostituire $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ al posto di $\tan\frac{x}{2}$. Il numeratore è $\sin x$, per la formula di duplicazione, e il denominatore è $2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 1$, che è $1+\cos x$ per le formule di duplicazione. La seconda espressione, all'ultimo membro, si ottiene facilmente dalla precedente moltiplicando numeratore e denominatore per $1-\cos x$, dopo di che al denominatore compare $1-\cos^2 x$ ossia $\sin^2 x$, per cui è sufficiente semplificare $\sin x$ al numeratore e al denominatore.

Posto $t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, seguono le cosiddette **formule parametriche**:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad e^{ix} = \frac{1+it}{1-it}.$$

La sostituzione di t per $\tan\frac{x}{2}$, con il conseguente cambiamento di $\sin x$ con $\frac{2t}{1+t^2}$ e di $\cos x$ con $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ è spesso in grado di convertire funzioni razionali in $\sin x$ e $\cos x$ da integrare in funzioni di t integrabili (si veda anche il successivo "punto di vista astratto").

Prodotti espressi mediante somme

Queste formule possono essere provate sviluppando la loro parte destra e semplificando con le formule di addizione. Sono anche dette *formule di Werner*.

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

Somme espresse mediante prodotti

Basta rimpiazzare x con $\frac{x+y}{2}$ e y con $\frac{x-y}{2}$ nelle espressioni dei prodotti mediante somme. Sono anche dette *formule di prostaferesi*.

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Funzioni trigonometriche inverse

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$$

$$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \pi/2$$

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2, & \text{se } x > 0 \\ -\pi/2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)(xy < 1)$$

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2, \text{ per } -1 \leq x \leq 1$$

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2, \text{ per } -1 \leq x \leq 1$$

$$\sin^2(\arctan(x)) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

Funzione gudermanniana

La funzione gudermanniana è definita nel seguente modo:

$$\operatorname{gd}(x) = 2\arctan e^x - \frac{\pi}{2}.$$

Questa funzione stabilisce un collegamento tra le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche senza ricorrere ai numeri complessi (si veda la voce relativa per i dettagli).

Identità per angoli costanti

La seguente curiosa identità è stata appresa da Richard Feynman quando era ragazzino:

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1/8.$$

Si tratta di un caso particolare della seguente identità in cui compare una variabile:

$$\prod_{j=0}^{k-1} \cos(2^j x) = \frac{\sin(2^k x)}{2^k \sin(x)}.$$

Altre identità senza variabili:

$$\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ = 1/128.$$
$$\cos 36^\circ + \cos 108^\circ = 1/2.$$
$$\cos 24^\circ + \cos 48^\circ + \cos 96^\circ + \cos 168^\circ = 1/2.$$

La misura in gradi degli angoli risulta meno vantaggiosa di quella in radianti per una x con 21 al denominatore:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{21}\right) + \cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{21}\right) + \cos\left(4\cdot\frac{2\pi}{21}\right) + \cos\left(5\cdot\frac{2\pi}{21}\right) + \cos\left(8\cdot\frac{2\pi}{21}\right) + \cos\left(10\cdot\frac{2\pi}{21}\right) = 1/2.$$

I fattori $1, 2, 4, 5, 8, 10$ inducono a pensare agli interi inferiori a $\frac{21}{2}$ primi con 21. Gli ultimi esempi sono le conseguenze di un risultato di base sui polinomi ciclotomici irriducibili: i coseni sono le parti reali delle radici di questi polinomi; la somma degli zeri dà il valore della funzione di Möbius valutata in 21; solo la metà delle radici sono presentate nella relazione precedente. Le due identità che precedono quest'ultima nascono nello stesso modo relativamente ai casi 10 e 15, rispettivamente.

La seguente identità senza variabili può essere utilizzata per calcolare π efficientemente:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239},$$

oppure usando la formula di Eulero:

$$\pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}.$$

Calcolo infinitesimale

Nel calcolo infinitesimale è essenziale che gli angoli argomenti di funzioni trigonometriche siano misurati in radianti; se sono misurati in gradi o in altre unità di misura, allora le relazioni riportate qui sotto risultano false. A partire dalle definizioni geometriche delle funzioni trigonometriche si ricavano le loro derivate dopo aver stabiliti i due limiti che seguono.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

(si verifica osservando la circonferenza trigonometrica e il teorema del confronto). Osserviamo che se usassimo la regola di de L'Hôpital per stabilire questo limite creeremmo un circolo vizioso sul piano logico, in quanto da questo limite si ricavano le derivate di seno e coseno necessarie per applicare la suddetta regola.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0.$$

(Si verifica usando l'identità $\tan(x/2) = (1 - \cos x)/\sin x$.)

Avendo stabilito questi due limiti, si stabilisce che $\sin' = \cos$ e $\cos' = -\sin$. riconducendo la derivazione alla sua definizione come limite di rapporto incrementale.

Se le funzioni seno e coseno sono definite dalle loro serie di Taylor, le loro derivate possono essere ottenute derivando le serie di potenze termine a termine.

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$

Le derivate delle altre funzioni trigonometriche sono ricavate dalle precedenti con le regole di derivazione. Abbiamo quindi:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x)$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Le identità integrali possono essere trovate nella tavole di integrali.

Dimostrazioni usando un'equazione differenziale

Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'' + y = 0$$

Utilizzando la formula di Eulero e il metodo di risoluzione delle equazioni differenziali lineari, insieme al teorema di unicità e al teorema di esistenza possiamo definire seno e coseno nei modi seguenti

$\cos(x)$ è l'unica soluzione della equazione

$y'' + y = 0$ soggetta alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

$\sin(x)$ è l'unica soluzione della equazione

$y'' + y = 0$ sotto le conditioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

Dimostriamo che

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

Introduciamo $T(x) := \sin'(x)$ e troviamo le sue derivate prima e seconda:

$T'(x) = \sin''(x)$ allora $\sin(x)$ è una soluzione di $y'' + y = 0$ possiamo dire che $\sin''(x) + \sin(x) = 0$; perciò $\sin''(x) = -\sin(x)$

Quindi

$$T'(x) = -\sin(x)$$

$$T''(x) = -\sin'(x) = -T(x).$$

Dunque possiamo dire che

$$T''(x) + T(x) = 0.$$

Utilizziamo ancora le tecniche di risoluzione delle equazioni differenziali lineari e la formula di Eulero la soluzione di $T''(x) + T(x) = 0$ deve essere una combinazione lineare di $\sin(x)$ e $\cos(x)$, quindi

$$T(x) = A\sin(x) + B\cos(x).$$

Si trova B ponendo 0 al posto di x

$$T(0) = 0 + B.$$

Per le condizioni iniziali $T(0) = \sin'(0) = 1$, quindi

$$B = 1.$$

Risolvendo per A abbiamo la derivata di $T(x)$ e ponendo 0 al posto di x

$$T'(x) = A\sin'(x) + B\cos'(x)$$

$$T'(0) = A\sin'(0) + B\cos'(0)$$

Utilizzando le condizioni iniziali e dato che $T'(x) = -\sin(x)$

$$-\sin(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0,$$

$$A = 0.$$

Sostituendo A e B nell'equazione originale di $T(x)$ abbiamo

$$T(x) = \cos(x),$$

ma dato che $T(x)$ è definita come $\sin'(x)$ abbiamo

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

o

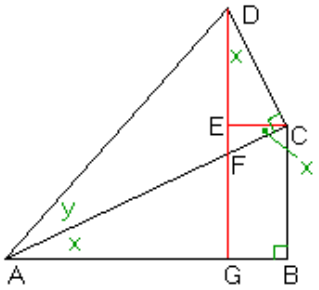
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$

Usando queste definizioni di seno e coseno, si possono provare tutte le altre proprietà di seno e coseno utilizzando le stesse tecniche.

Dimostrazioni geometriche

Formula di addizione del seno

Come mostrato in figura si costruisce il segmento DG perpendicolare ad AB ed il segmento CE parallelo ad AB.
x = Angolo BAC = Angolo ACE = Angolo CDE.
EG = BC.



Allora

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \frac{DG}{AD} = \frac{EG+DE}{AD} = \frac{BC+DE}{AD} = \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD} \\ &= \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD} + \frac{AB}{AC}\cdot\frac{CD}{AD} \\ &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Formula di addizione del coseno

Osservando la figura precedente:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \frac{AG}{AD} = \frac{AB-GB}{AD} = \frac{AB-EC}{AD} = \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD} \\ &= \frac{AB}{AD}\cdot\frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD}\cdot\frac{CD}{CD} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD}\cdot\frac{CD}{AD} \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Punti di vista astratti

Dato che la circonferenza è una curva algebrica di genere 0, ci si aspetta che le funzioni circolari possano essere riducibili a funzioni razionali. In effetti è noto classicamente che usando sistematicamente le formule di bisezione per la tangente si possono esprimere le funzioni seno e coseno in termini di una nuova variabile t.

Note

1. ^ [1] (http://www.treccani.it/enciclopedia/funzioni-circolari_(Enciclopedia-Italiana)/)

Voci correlate

- Trigonometria

- Seno (matematica)
- Coseno

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **identità trigonometriche (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Trigonometric_identities?uselang=it)**

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Identità_trigonometrica&oldid=122265304"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 2 ago 2021 alle 17:39.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Formule di duplicazione

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento matematica non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

Le **formule di duplicazione** nella trigonometria servono per calcolare il seno, il coseno e la tangente di 2α avendo il valore di seno, coseno o tangente di α. Sono ottenibili direttamente a partire dalle più generali formule di addizione delle funzioni trigonometriche nel caso particolare $\alpha = \beta$.

Per il seno e il coseno si ha:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha);\\ \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Poiché $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, tale formula può anche essere riscritta come:

- $\cos(2\alpha) = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$

Per la tangente si ha:

$$\tan(2\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan(\alpha)\tan(\alpha)} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha},$$

e la soprastante formula è valida per $\tan\alpha \neq \pm 1$, ossia per:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In corrispondenza di tali valori la formula tende all'infinito, ed in particolare:

- $\lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})^-} \tan(2\alpha) = +\infty;$
- $\lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})^+} \tan(2\alpha) = -\infty.$

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Formule_di_duplicazione&oldid=132004366"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta l'11 feb 2023 alle 13:31.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Tavola trigonometrica

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica la **tavola trigonometrica** è una tabella che elenca il valore di una funzione trigonometrica per un certo numero di possibili valori angolari. Una **tavola trigonometrica** è principalmente caratterizzata da due aspetti:

- *dettaglio*: indica la differenza tra due angoli consecutivi di cui la tabella riporta i valori; maggiore è il dettaglio, minore è la differenza;
- *precisione*: indica con quale approssimazione sono arrotondati i valori della funzione trigonometrica riportati nella tavola.

Il dettaglio può non essere costante per meglio mappare funzioni che abbiano asintoti verticali o orizzontali, che implicano significative variazioni del valore delle funzione in prossimità di alcuni valori angolari.

Indice

Storia
- Origini
- Impieghi storici
- Impieghi moderni

Metodi per l'ottenimento delle tavole
- Formule di addizione e bisezione di angoli
- Equazioni differenziali
- Formule ricorsive di Eulero

Tavola con valori

Note

Bibliografia

Collegamenti esterni

Storia

Origini

La prima tavola trigonometrica di cui si ha testimonianza risale al II secolo a.C. ed è quella predisposta da Ipparco di Nicea allo scopo di risolvere, ovvero individuare tutti gli angoli e le lunghezze dei lati nota una parte di essi, ogni possibile triangolo.[1]

Secondo alcune interpretazioni della tavoletta d'argilla di origine babilonese nota con il nome di *Plimpton 322* (risalente al 1800 a.C.) potrebbe essere una rudimentale tavola trigonometrica.[2]

Claudio Tolomeo, attorno al 150, nella sua opera *Almagesto* spiega come costruire una *tavola delle corde* utile per i calcoli astronomici.

È curioso notare come le prime tavole trigonometriche non mappassero le funzioni seno e coseno, come normalmente accade oggi, quanto le funzioni seno e senoverso.

Impieghi storici

Prima dell'introduzione delle calcolatrici tascabili, le tavole trigonometiche erano essenziali per i calcoli richiesti in numerose aree della scienza e delle applicazioni pratiche, si veda ad esempio l'importanza dell'algoritmo di prostaferesi per la navigazione e l'astronomia.

Il calcolo delle tabelle matematiche era un'area di studio molto importante che portò all'invenzione dei primi dispositivi automatici di calcolo.

Tra i matematici che si ricordano per aver contribuito a definire tavole sempre più accurate, vanno citati:

- Abu l-Wafa Muhammad al-Buzjani
- Al-Kashi
- Bhaskara
- Johann Werner
- Keplero
- Georg Joachim Rheticus
- Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

Impieghi moderni

Oggi ogni calcolatrice è in grado di fornire i valori delle funzioni trigonometriche per qualsiasi angolo. I metodi usati dalle calcolatrici per ottenere questo risultato comprendono:

- l'interpolazione di valori della funzione appartenenti ad una tabella precaricata nella memoria della calcolatrice
- l'approssimazione della funzione tramite uno sviluppo polinomiale di grado sufficientemente elevato.

L'interpolazione, anche di tabelle non molto dettagliate, trova ancora oggi impiego nella computer grafica, dove la precisione di calcolo non deve essere necessariamente elevata volendo prediligere la velocità di calcolo.

Un'altra importante applicazione delle tabelle trigonometriche è negli algoritmi per il calcolo della trasformata di Fourier veloce (FFT), dove gli stessi valori delle funzioni trigonometriche (i cosiddetti fattori *twiddle* o *di rotazione*) devono essere calcolati più volte all'interno della stessa trasformata, soprattutto nel caso non raro in cui si eseguono più trasformazioni dello stesso ordine. In questo caso non sarebbe accettabile chiamare ripetutamente la routine generica di calcolo poiché il tempo complessivo sarebbe

eccessivo. Una possibilità è quella di chiamare la routine un'unica volta per ciascun valore twiddle e storicizzarne il risultato in una tabella da consultare durante l'algoritmo. Seppure efficace, la soluzione non risulta efficiente in termine di quantità di memoria usata.

Metodi per l'ottenimento delle tavole

Formule di addizione e bisezione di angoli

Storicamente, il metodo più antico, e probabilmente quello più comunemente usato fino all'avvento dei calcolatori elettronici, per ottenere e ampliare con sistematicità una tavola trigonometrica è stato quello di applicare ripetutamente le identità trigonometriche notevoli note come formule di bisezione e formule di addizione e sottrazione partendo da valori noti quali $\sin(\pi/2) = 1$ oppure $\cos(\pi/2) = 0$:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

L'impiego più remoto, di cui ci sia pervenuta una testimonianza scritta, risale a Tolomeo.

Equazioni differenziali

È un metodo rapido, ma impreciso, per ottenere una tabella di dimensione N nell'intervallo $[0, 2\pi]$

Posto $s_n = \sin(2\pi n/N)$ e $c_n = \cos(2\pi n/N)$, si usano le seguenti formule:

$s_0 = 0$
$c_0 = 1$
$s_{n+1} = s_n + d \times c_n$
$c_{n+1} = c_n - d \times s_n$

per n = 0,...,N-1, dove $d = 2\pi/N$.

Queste formule si ottengono applicando il metodo di Eulero per l'integrazione del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{ds(t)}{dt} = c(t)$$
$$\frac{dc(t)}{dt} = -s(t)$$

con le condizioni al contorno $s(0) = 0$ e $c(0) = 1$, la cui soluzione analitica è $s = \sin(t)$ e $c = \cos(t)$.

L'errore che si commette con l'uso di questo algoritmo è inversamente proporzionale ad N. In particolare per il seno il massimo dell'approssimazione è circa 15/N, mentre per il coseno è 20/N. Ad esempio, per N = 256 l'errore massimo che si commette nel calcolo del seno è circa ~0.061 (s_{201} = -1.0368 invece di -0.9757). Per N = 1024, l'errore massimo che si commette nel calcolo del seno è circa ~0.015 (s_{802} = -0.99321 invece di -0.97832), all'incirca 4 (=1024/256) volte inferiore.

L'andamento dell'ampiezza dell'errore non è lineare ma oscillante e divergente, per cui se si volesse tracciare la curva definita anche da coppie (s,c) ottenute per valori superiori a N, si otterrebbe una spirale logaritmica anziché un cerchio.

Formule ricorsive di Eulero

Una semplice formula ricorsiva per la generazione delle tabelle trigonometriche è basata sulla Formula di Eulero e sulla seguente relazione:

$$e^{i(\theta+\Delta\theta)} = e^{i\theta} \times e^{i\Delta\theta}$$

Possiamo così calcolare i valori trigonometrici s_n e c_n come segue:

$c_0 = 1$
$s_0 = 0$
$c_{n+1} = w_r\, c_n - w_i\, s_n$
$s_{n+1} = w_i\, c_n + w_r\, s_n$

per n = 0, ..., N - *1*, dove $w_r = \cos(2\pi/N)$ e $w_i = \sin(2\pi/N)$. I due valori iniziali sono generalmente calcolati avvalendosi di funzioni di libreria esistenti (ad esempio utilizzando semplicemente con il metodo di Newton nel piano complesso per il calcolo delle radici dell'unità di $z^N - 1$).

Questo metodo in teoria (cioè in aritmetica esatta) dovrebbe fornire una tavola di valori *esatta*, tuttavia gli errori dovuti all'aritmetica finita (virgola mobile) fanno sì che l'errore commesso sia un O($\varepsilon\, N$) (nel peggiore dei casi ma anche mediamente), dove ε è la precisione della rappresentazione in virgola mobile.

Un significativo miglioramento si ottiene utilizzando la seguente modifica, uno stratagemma (ideato da Richard C. Singleton) sovente utilizzato per ottenere i valori trigonometrici nelle implementazioni della FFT:

$c_0 = 1$
$s_0 = 0$
$c_{n+1} = c_n - (\alpha c_n + \beta\, s_n)$
$s_{n+1} = s_n + (\beta\, c_n - \alpha\, s_n)$

dove $\alpha = 2\sin^2(\pi/N)$ e $\beta = \sin(2\pi/N)$. Gli errori di questo metodo sono molto più piccoli, O($\varepsilon\, \sqrt{N}$) in media e O($\varepsilon\, N$) nel peggiore dei casi, che è comunque in grado di inficiare significativamente la precisione per FFT di grandi dimensioni.

Tavola con valori

Gradi °	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
<0°	<0	-sin (-x)	cos (-x)	-tg(-x)	-ctg(-x)
0°	0	0	1	0	*Non definita*

1°	π/180	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900
2°	π/90	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363
3°	π/60	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811
4°	π/45	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007
5°	π/36	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301
6°	π/30	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144
7°	7π/180	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443
8°	2π/45	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154
9°	π/20	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138
10°	π/18	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713
11°	11π/180	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446
12°	π/15	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046
13°	13π/180	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315
14°	7π/90	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108
15°	π/12	0,2588[3]	0,9659[4]	0,2679[5]	3,7321[6]
16°	4π/45	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874
17°	17π/180	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709
18°	π/10	0,3090[7]	0,9511[8]	0,3249[9]	3,0777[10]
19°	19π/180	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042
20°	π/9	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475
21°	7π/60	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051
22°	11π/90	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751
23°	23π/180	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559
24°	2π/15	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460
25°	5π/36	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445
26°	13π/90	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503
27°	3π/20	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626
28°	7π/45	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807
29°	29π/180	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040
30°	π/6	0,5000[11]	0,8660[12]	0,57735[13]	1,7321[14]
31°	31π/180	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643
32°	8π/45	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003
33°	11π/60	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399
34°	17π/90	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826
35°	7π/36	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281
36°	π/5	0,5878[15]	0,8090[16]	0,7265[17]	1,3764[18]
37°	37π/180	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270
38°	19π/90	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799
39°	13π/60	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349
40°	2π/9	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918
41°	41π/180	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504
42°	7π/30	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106
43°	43π/180	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724
44°	11π/45	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355
45°	π/4	0,7071[19]	0,7071[19]	1	1

45° ↔ 90°	π/4 ↔ π/2	cos(90°-x)	sin(90°-x)	ctg(90°-x)	tg(90°-x)
60°	π/3	0,8660[12]	0,5000[11]	1,7321[14]	0,5774[13]
75°	5π/12	0,9659[4]	0,2588[3]	3,7321[6]	0,2679[5]
90°	π/2	1	0	*Non definita*	0
90° ↔ 180°	π/2 ↔ π	sin(180°-x)	-cos(180°-x)	-tg(180°-x)	-ctg(180°-x)
180°	π	0	-1	0	*Non definita*
180° ↔ 360°	π ↔ 2π	-sin(x-180°)	-cos(x-180°)	tg(x-180°)	ctg(x-180°)
360°	2π	0	1	0	*Non definita*
>360°	>2π	sin(x-360°)	cos(x-360°)	tg(x-360°)	ctg(x-360°)

Note

1. ^ Toomer, "The Chord Table of Hipparchus" (1973).
2. ^ (EN) Joyce, David E., *Plimpton 322*, 1995.
3. $(\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{2})$
4. $(\sqrt{3}+1)/(2\sqrt{2})$
5. $1/(2+\sqrt{3})$
6. $2+\sqrt{3}$
7. ^ $1/(\sqrt{5}+1)$
8. ^ $\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$
9. ^ $(\sqrt{5}-1)/\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
10. ^ $\sqrt{10+2\sqrt{5}}/(\sqrt{5}-1)$
11. $1/2$
12. $\sqrt{3}/2$
13. $\sqrt{3}/3$
14. $\sqrt{3}$
15. ^ $\sqrt{10-2\sqrt{5}}/4$
16. ^ $1/(\sqrt{5}-1)$
17. ^ $\sqrt{10-2\sqrt{5}}/(\sqrt{5}+1)$
18. ^ $(\sqrt{5}+1)/\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
19. $\sqrt{2}/2$

Bibliografia

- Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1991).
- Manfred Tasche and Hansmartin Zeuner, "Improved roundoff error analysis for precomputed twiddle factors," *J. Computational Analysis and Applications* **4** (1), 1-18 (2002).

- James C. Schatzman, "Accuracy of the discrete Fourier transform and the fast Fourier transform," *SIAM J. Sci. Comput.* **17** (5), 1150-1166 (1996).

Collegamenti esterni

-
- (**EN**) *Tavola trigonometrica*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Tavola_trigonometrica&oldid=132817242"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 2 apr 2023 alle 17:03.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Costanti trigonometriche esatte

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Con il termine **costanti trigonometriche esatte** si indicano espressioni riguardanti valori o combinazioni di valori di funzioni trigonometriche costruite a partire da numeri interi con le operazioni razionali e le operazioni di estrazione di radice. Queste espressioni numeriche sono utilizzate principalmente per semplificare le soluzioni di problemi geometrici fornite mediante radicali.

Tutti i valori delle funzioni sin, cos e tan di angoli multipli di 3° sono ottenibili servendosi delle identità di bisezione, duplicazione, addizione/sottrazione e dei valori corrispondenti agli angoli di 0°, 30°, 36° e 45°. Si ricorda che 1° = π/180 radianti.

Indice

Tavola delle espressioni
- 0° - valori fondamentali
- 3° - Esacontagono (60 lati)
- 6° - Triacontagono (30 lati)
- 9° - Icosagono (20 lati)
- 12° - Pentadecagono (15 lati)
- 15° - Dodecagono (12 lati)
- 18° - Decagono (10 lati)
- 21° = 9° + 12°
- 22.5° - Ottagono (8 lati)
- 24° = 12° + 12°
- 27° = 12° + 15°
- 30° - Esagono (6 lati)
- 33° = 15° + 18°
- 36° - Pentagono (5 lati)
- 39° = 18° + 21°
- 42° = 21° + 21°
- 45° - Quadrato (4 lati)

Note
- Uso delle costanti
- Dimostrazioni delle espressioni mediante triangoli
- Espressioni non singole

Voci correlate

Collegamenti esterni

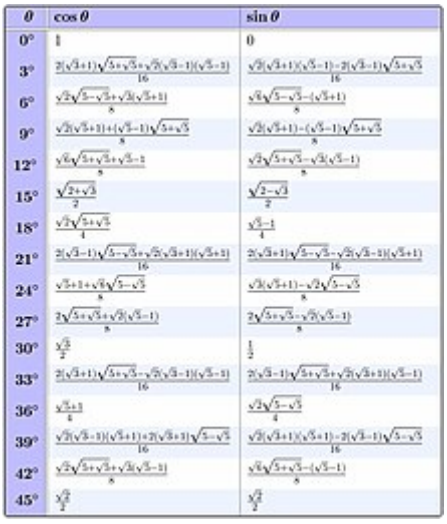
Tavola delle espressioni

I valori relativi ad angoli non contenuti nell'intervallo [0° ... 45°] si possono ricavare da quelli qui forniti mediante semplici osservazioni sulla circonferenza di raggio 1 e sugli effetti di opportune rotazioni e riflessioni.

0° - valori fondamentali

$$\sin 0^\circ = 0$$
$$\cos 0^\circ = 1$$

$$\tan 0^\circ = 0$$



θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0°	1	0
3°	$\frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$
6°	$\frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{8}$	$\frac{\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)}{8}$
9°	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$
12°	$\frac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$
15°	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
18°	$\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
21°	$\frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)}{16}$	$\frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{16}$
24°	$\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$
27°	$\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
33°	$\frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$	$\frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)}{16}$
36°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$
39°	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16}$
42°	$\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)}{8}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Valori esatti di seno e coseno per angoli multipli di 3 gradi.

3° - Esacontagono (60 lati)

$$\sin\frac{\pi}{60} = \sin 3^\circ = \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(1-\sqrt{3}) + \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{16}$$

$$\cos\frac{\pi}{60} = \cos 3^\circ = \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(1+\sqrt{3}) + \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$\tan\frac{\pi}{60} = \tan 3^\circ = \frac{\left[(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{5})-2\right]\left(2-\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\right)}{4}$$

6° - Triacontagono (30 lati)

$$\sin\frac{\pi}{30} = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}-(\sqrt{5}+1)}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{30} = \cos 6^\circ = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{8}$$

$$\tan\frac{\pi}{30} = \tan 6^\circ = \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{2}$$

9° - Icosagono (20 lati)

$$\sin\frac{\pi}{20} = \sin 9^\circ = \frac{-2\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{20} = \cos 9^\circ = \frac{+2\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}{8}$$

$$\tan\frac{\pi}{20} = \tan 9^\circ = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(2+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}+1)$$

12° - Pentadecagono (15 lati)

$$\sin\frac{\pi}{15} = \sin 12^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{15} = \cos 12^\circ = \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)}{8}$$

$$\tan\frac{\pi}{15} = \tan 12^\circ = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}(2+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}+1)}{2}$$

15° - Dodecagono (12 lati)

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$$
$$\cot\frac{\pi}{12} = \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$$

18° - Decagono (10 lati)

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
$$\cos\frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

$$\tan\frac{\pi}{10} = \tan 18^\circ = \frac{\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}{5}$$

$$\cot\frac{\pi}{10} = \cot 18^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

21° = 9° + 12°

$$\sin\frac{7\pi}{60} = \sin 21^\circ = \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}\,(\sqrt{3}+1) - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{5})}{16}$$

$$\cos\frac{7\pi}{60} = \cos 21^\circ = \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}\,(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{5})}{16}$$

$$\tan\frac{7\pi}{60} = \tan 21^\circ = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})+(2+\sqrt{3})(\sqrt{5}-3)+2}{2}$$

22.5° - Ottagono (8 lati)

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{8} = \tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$$

$$\cot\frac{\pi}{8} = \cot 22.5^\circ = \sqrt{2}+1$$

24° = 12° + 12°

$$\sin 24^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\,(1-\sqrt{5})+2\sqrt{3}(1+\sqrt{5}))}{16}$$

$$\cos 24^\circ = \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})}\,(\sqrt{5}-1)+2(1+\sqrt{5}))}{16}$$

$$\tan 24^\circ = \frac{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{3}\right)\,(3+\sqrt{5})}{4}$$

$$\cot 24^\circ = \frac{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{3}\right)\,(\sqrt{5}-1)}{4}$$

27° = 12° + 15°

$$\sin 27^\circ = \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(1-\sqrt{5})}{8}$$

$$\cos 27^\circ = \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$$

$$\tan 27^\circ = -\sqrt{5-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)$$

30° - Esagono (6 lati)

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot\frac{\pi}{6} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

33° = 15° + 18°

$$\sin 33^\circ = \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(-1+\sqrt{3}) + \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{3})}{16}$$

$$\cos 33^\circ = \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(+1+\sqrt{3}) + \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(1-\sqrt{3})}{16}$$

$$\tan 33^\circ = \frac{\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}\,\left(-15+10\sqrt{3}-7\sqrt{5}+4\sqrt{15}\right) + 5\left((-2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})+2\right)}{10}$$

36° - Pentagono (5 lati)

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$
$$\tan\frac{\pi}{5} = \tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5})}$$

39° = 18° + 21°

$$\sin 39^\circ = \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}\,(1-\sqrt{3}) + \sqrt{2}(+1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{16}$$

$$\cos 39^\circ = \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}\,(1+\sqrt{3}) + \sqrt{2}\,(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{16}$$

$$\tan 39^\circ = \frac{\left(\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-2\right)\left((2-\sqrt{3})(-3+\sqrt{5})+2\right)}{4}$$

42° = 21° + 21°

$$\sin 42^\circ = \frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}\,(1+\sqrt{5})+2(1-\sqrt{5})}{16}$$
$$\cos 42^\circ = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\,(1+\sqrt{5})+2\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{16}$$
$$\tan 42^\circ = \frac{-\sqrt{1-2\sqrt{1}}\,(3+\sqrt{5})+\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2}$$

45° - Quadrato (4 lati)

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^\circ = 1$$
$$\cot\frac{\pi}{4} = \cot 45^\circ = 1$$

Note

Uso delle costanti

Una grandezza come il volume di un dodecaedro è data dalla seguente espressione:

$$V = 5e^3 \cos 36^\circ / \tan^2 36^\circ$$

Usando

$$\cos\ 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$
$$\tan\ 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

l'espressione precedente può essere semplificata nella:

$$V = \frac{e^3(15+7\sqrt{5})}{4}.$$

Dimostrazioni delle espressioni mediante triangoli

La derivazione dei valori particolari delle funzioni sin, cos e tan nella forma radiale è basata sulla costruibilità di triangoli rettangoli che conviene individuare come sezioni simmetriche di poligoni regolari. Ciascuno dei triangoli rettangoli considerati ha come vertici 3 punti di un poligono regolare: un suo vertice *V*, il punto medio *M* di un lato che ha come estremo *V* e il centro *C* del poligono. Per N=3, 4, 5, ... si considera un N-agono regolare suddiviso in 2*N triangoli rettangoli aventi angoli di 180°/N (vertice *C*), 90° (vertice *M*) e 90°-180°/N (vertice *V*).

Ci si basa sulla costruibilità con riga e compasso di poligoni a 3, 4, 5, e 15 lati e si utilizzano le bisettrici per ricavare anche i multipli di due.

- Costruibili
  - Poligoni regolari a $3*2^X$ lati, X=0,1,2,3,...
    - 30°-60°-90° triangolo - triangolo (3 lati)
    - 60°-30°-90° triangolo - esagono (6 lati)
    - 75°-15°-90° triangolo - dodecagono (12 lati)
    - 82.5°-7.5°-90° triangolo - tetracosagono (24 lati)
    - 86.25°-3.75°-90° triangolo - ottatetracontagono (48 lati)
    - ...
  - $4*2^X$ lati
    - 45°-45°-90° triangolo - quadrato (4 lati)
    - 67.5°-22.5°-90° triangolo - ottagono (8 lati)
    - 88.75°-11.25°-90° triangolo - esadecagono (16 lati)
    - ...
  - $5*2^X$ lati
    - 54°-36°-90° triangolo - pentagono (5 lati)
    - 72°-18°-90° triangolo - decagono (10 lati)
    - 81°-9°-90° triangolo - icosagono (20 lati)
    - 85.5°-4.5°-90° triangolo - tetracontagono (40 lati)
    - 87.75°-2.25°-90° triangolo - ottacontagono (80 lati)
    - ...
  - $15*2^X$ lati
    - 78°-12°-90° triangolo - pentadecagono (15 lati)
    - 84°-6°-90° triangolo - triacontagono (30 lati)
    - 87°-3°-90° triangolo - esacontagono (60 lati)
    - 88.5°-1.5°-90° triangolo - ettoicosagono (120 lati)
    - 89.25°-0.75°-90° triangolo - diettotetracontagono (240 lati)
  - ... (Poligoni regolari di grado superiore costruibili non possono essere fatte per angoli di grado intero: 17, 51, 85, 255, 257...)

- Non costruibili (con angoli di grado intero o di mezzo grado) - Le forme radiali non limitate per queste proporzioni di taglio del triangolo sono note.
  - $9*2^X$ lati
    - 70°-20°-90° triangolo - ennagono (9 lati)
    - 80°-10°-90° triangolo - ottadecagono (18 lati)
    - 85°-5°-90° triangolo - esatriacontagono (36 lati)
    - 87.5°-2.5°-90° triangolo - doeptacontagono (72 lati)
    - ...
  - $45*2^X$ lati
    - 86°-4°-90° triangolo - pentatetracontagono (45 lati)
    - 88°-2°-90° triangolo - ennacontagono (90 lati)
    - 89°-1°-90° triangolo - ettaottacontagono (180 lati)
    - 89.5°-0.5°-90° triangolo - triettoesacontagono (360 lati)
    - ...

Espressioni non singole

La semplificazione di un radicale annidato, ovvero un radicale doppio, non è banale e non sempre può essere effettuata.

Esempio:

$$4\sin 18^\circ = \sqrt{2(3-\sqrt{5})} = \sqrt{5}-1$$

Non è così evidente che questa uguaglianza sia vera, ed in generale i radicali doppi non possono essere ridotti. Però si ha

$$\sqrt{a+b\sqrt{c}} = d+e\sqrt{c} \quad \text{se} \quad a^2-b^2c \quad \text{è un quadrato perfetto}$$

Voci correlate

- Glossario di trigonometria
- Funzioni trigonometriche
- Identità trigonometriche
- Poligono

Collegamenti esterni

- *Poligoni costruibili*, su *mathworld.wolfram.com*.
- *Poligoni regolari costruibili*, su *mathforum.org*. URL consultato il 17 luglio 2004 (archiviato dall'url originale il 12 aprile 2008).
- *Nomenclatura dei poligoni*, su *mathforum.org*.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Costanti_trigonometriche_esatte&oldid=114608413"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 30 lug 2020 alle 05:40.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Funzione trigonometrica inversa

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, le **funzioni trigonometriche inverse** sono un insieme di funzioni strettamente collegate alle funzioni trigonometriche. Le funzioni inverse principali sono elencate nella seguente tabella.

Nome	Notazione usuale	Definizione	Dominio	Codominio
arcoseno	$y = \arcsin(x)$	$x = \sin(y)$	$[-1; +1]$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
arcocoseno	$y = \arccos(x)$	$x = \cos(y)$	$[-1; +1]$	$0 \leq y \leq \pi$
arcotangente	$y = \arctan(x)$	$x = \tan(y)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
arcocosecante	$y = \operatorname{arccsc}(x)$	$x = \operatorname{cosec}(y), y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$-\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \vee 0 < y \leq \frac{\pi}{2}$
arcosecante	$y = \operatorname{arcsec}(x)$	$x = \sec(y), y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$0 \leq y < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < y \leq \pi$
arcocotangente	$y = \operatorname{arccot}(x)$	$x = \cot(y), y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$	$\mathbb{R}$	$0 < y < \pi$

Talvolta vengono utilizzate le notazioni $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, etc in luogo di arcsin, arccos, etc, ma questa notazione ha lo svantaggio di creare confusione, per esempio, fra $\arcsin(x)$ e $1/\sin(x)$, sebbene il contesto sia generalmente sufficiente a chiarire l'ambiguità.

Nei linguaggi di programmazione al computer le funzioni arcsin, arccos, arctan sono generalmente chiamate asin, acos, atan. Molti linguaggi di programmazione forniscono anche la funzione con due argomenti atan2, che calcola l'arcotangente di *y*/*x* dati *y* ed *x*, ma in un intervallo di [-π,π].

Indice

Serie infinite

Definizioni come integrali

Forme logaritmiche

Dimostrazione di esempio

Derivate delle funzioni trigonometriche inverse

Integrali indefiniti delle funzioni trigonometriche inverse

Semplificazione somme

Altri progetti

Collegamenti esterni

Serie infinite

Analogamente al seno ed al coseno, le funzioni trigonometriche inverse si possono in alternativa definire in termini di serie infinite.

$$\arcsin z = z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{z^{2n+1}}{4^n(2n+1)}, \quad |z| < 1$$

$$\arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z = \frac{\pi}{2} - \left[z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} + \cdots\right] = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{z^{2n+1}}{4^n(2n+1)}, \quad |z| < 1$$

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

$$\operatorname{arccsc} z = \arcsin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3z^3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{1}{5z^5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{1}{7z^7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(2n+1)z^{2n+1}}, \quad |z| > 1$$

$$\operatorname{arcsec} z = \arccos\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3z^3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{1}{5z^5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{1}{7z^7} + \cdots\right] = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(2n+1)z^{2n+1}}, \quad |z| > 1$$

$$\operatorname{arccot} z = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \left[z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots\right] = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

Definizioni come integrali

Queste funzioni si possono anche definire dimostrando che sono integrali di altre funzioni.

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z, \quad |x| < 1$$
$$\arccos(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z, \quad |x| < 1$$
$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{arccot}(x) = \int_x^\infty \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z, \quad z > 0$$
$$\operatorname{arcsec}(x) = \int_x^1 \frac{1}{|z|\sqrt{z^2-1}}\,\mathrm{d}z, \quad x > 1$$
$$\operatorname{arccsc}(x) = \int_x^\infty \frac{-1}{|z|\sqrt{z^2-1}}\,\mathrm{d}z, \quad x > 1$$

Forme logaritmiche

È possibile esprimere queste funzioni usando i logaritmi naturali. Ciò permette di estendere in modo naturale il loro dominio all'intero piano complesso.

$$\arcsin x = -i\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right) = \operatorname{arccsc}\frac{1}{x}$$
$$\arccos x = -i\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{2} + i\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcsec}\frac{1}{x}$$
$$\arctan x = \frac{i}{2}\left(\ln(1-ix) - \ln(1+ix)\right) = \operatorname{arccot}\frac{1}{x}$$
$$\operatorname{arccsc} x = -i\ln\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \frac{i}{x}\right) = \arcsin\frac{1}{x}$$
$$\operatorname{arcsec} x = -i\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} + \frac{1}{x}\right) = i\ln\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \frac{i}{x}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccsc} x = \arccos\frac{1}{x}$$
$$\operatorname{arccot} x = \frac{i}{2}\left(\ln\left(1-\frac{i}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{i}{x}\right)\right) = \arctan\frac{1}{x}$$

Queste relazioni si possono dimostrare elementarmente tramite l'espansione delle funzioni trigonometriche alla forma esponenziale.

Dimostrazione di esempio

$\arcsin x = \theta$

$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = x$ (definizione esponenziale del seno)

Sia $k = e^{i\theta}$

$\frac{k - \frac{1}{k}}{2i} = x$

$k^2 - 2ikx - 1 = 0$ (si risolva per k)

$k = ix \pm \sqrt{1-x^2} = e^{i\theta}$ (si scelga la soluzione positiva)

$\theta = \arcsin x = -i\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right)$ Q.E.D.

Derivate delle funzioni trigonometriche inverse

Le derivate delle funzioni trigonometriche inverse valgono:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Questi risultati si ottengono facilmente derivando la forma logaritmica mostrata sopra.

Integrali indefiniti delle funzioni trigonometriche inverse

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \arccos x\,\mathrm{d}x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$
$$\int \operatorname{arccsc} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arccsc} x + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C$$
$$\int \operatorname{arcsec} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arcsec} x - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C$$
$$\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

Tutti questi integrali si ricavano integrazione per parti e le derivate elencate al paragrafo precedente.

Semplificazione somme

È possibile combinare la somma o differenza di due funzioni trigonometriche inverse in un'espressione dove la funzione trigonometrica compare una sola volta:

$$\arcsin x_1 \pm \arcsin x_2 = \begin{cases} \arcsin\left(x_1\sqrt{1-x_2^2} \pm x_2\sqrt{1-x_1^2}\right) & \pm x_1 x_2 \le 0 \vee x_1^2 + x_2^2 \le 1 \\ \pi - \arcsin\left(x_1\sqrt{1-x_2^2} \pm x_2\sqrt{1-x_1^2}\right) & x_1 > 0 \wedge \pm x_2 > 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin\left(x_1\sqrt{1-x_2^2} \pm x_2\sqrt{1-x_1^2}\right) & x_1 < 0 \wedge \pm x_2 < 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 > 1 \end{cases}$$

$$\arccos x_1 \pm \arccos x_2 = \operatorname{sgn}(x_2 \pm x_1)\arccos\left(x_1 x_2 \mp \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}\right) + \begin{cases} 2\pi & \pm = + \wedge x_1 + x_2 < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\arctan\left(x_1\right) \pm \arctan\left(x_2\right) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x_1 \pm x_2}{1 \mp x_1 x_2}\right) & \pm x_1 x_2 < 1 \\ \operatorname{sgn}\left(x_1\right)\dfrac{\pi}{2} & \pm x_1 x_2 = 1 \\ \arctan\left(\dfrac{x_1 \pm x_2}{1 \mp x_1 x_2}\right) + \operatorname{sgn}\left(x_1\right)\pi & \pm x_1 x_2 > 1 \end{cases}$$

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **funzione trigonometrica inversa (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Inverse_trigonometric_functions?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- Weisstein, Eric W., Inverse Trigonometric Functions (http://mathworld.wolfram.com/InverseTrigonometricFunctions.html) su MathWorld.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Funzione_trigonometrica_inversa&oldid=105346758"

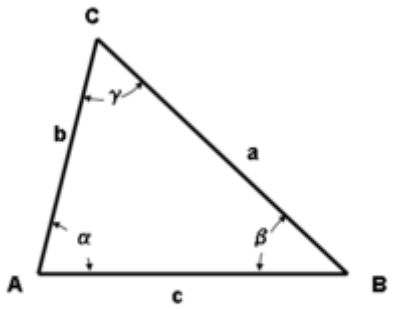
Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 2 giu 2019 alle 19:50.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Teorema dei seni

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In trigonometria, il **teorema dei seni** (noto anche come **teorema di Eulero**) esprime una relazione di proporzionalità diretta fra le lunghezze dei lati di un triangolo e i seni dei rispettivi angoli opposti.



Un triangolo generico con le comuni notazioni

Si consideri il triangolo generico *ABC* rappresentato nella figura a lato, in cui gli angoli sono indicati da lettere greche minuscole e i lati opposti agli angoli dalle corrispondenti lettere latine minuscole.

$$\begin{aligned} a &= \overline{BC}, \quad \alpha = C\hat{A}B \\ b &= \overline{AC}, \quad \beta = A\hat{B}C \\ c &= \overline{AB}, \quad \gamma = B\hat{C}A \end{aligned}$$

Vale quindi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

dove *R* è il raggio del cerchio circoscritto al triangolo *ABC* e

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

è l'area del triangolo ricavata dal semiperimetro *p* grazie alla formula di Erone.

La relazione di proporzionalità viene formulata a volte in questo modo:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Indice

Applicazioni

Generalizzazione alle geometrie non euclidee

- Geometria sferica
- Geometria iperbolica

Generalizzazione al tridimensionale (euclideo)

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Applicazioni

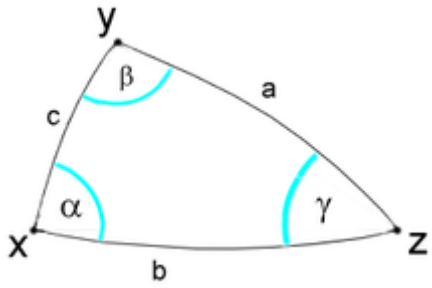
Il teorema può essere adoperato

- per determinare il raggio del cerchio circoscritto:

$$R = \frac{a}{2\,\sin\alpha}$$

- per la risoluzione di un triangolo dati un angolo, un lato adiacente all'angolo e il lato opposto (vedere figura a lato):

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{a\,\sin\beta}{b}.$$



Risoluzione di un triangolo con il teorema dei seni

Generalizzazione alle geometrie non euclidee

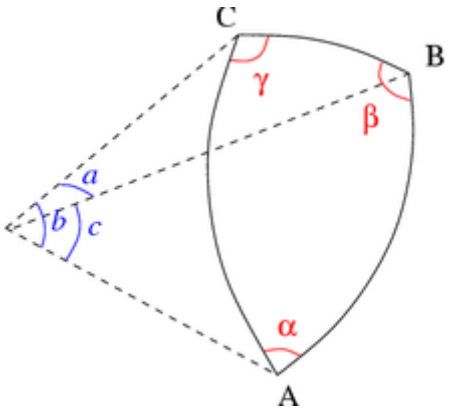
Lo stesso argomento in dettaglio: ***Geometrie non euclidee***.

Per una superficie non euclidea dalla curvatura K, il *raggio di curvatura* ρ è

$$\rho = 1/\sqrt{|K|}.$$

Si definiscono quindi le dimensioni ridotte del triangolo:

$$a = \overline{BC}/\rho,$$
$$b = \overline{AC}/\rho,$$
$$c = \overline{AB}/\rho.$$



Triangolo sferico: dimensioni ridotte *a*, *b* e *c*; angoli *α*, *β* e *γ*

Nel caso di un *triangolo sferico*, *a*, *b* e *c* corrispondono alle misure angolari dei segmenti degli archi grandi [*BC*], [*AC*] e [*AB*] (vedere figura).

Geometria sferica

In un triangolo sferico *ABC* tracciato sulla sfera di centro *O* e di raggio ρ, il teorema del seno è espresso da

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{6V_{OABC}}{\rho^3 \, \sin a \, \sin b \, \sin c},$$

dove V_{OABC} è il volume del tetraedro *OABC*.

Geometria iperbolica

> *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Geometria iperbolica***.

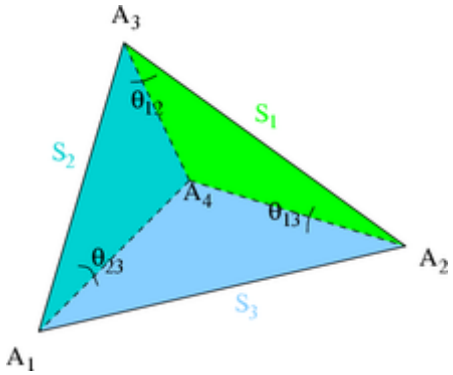
In un triangolo iperbolico, il teorema dei seni si esprime con

$$\frac{\operatorname{senh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{senh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{senh} c}{\sin \gamma}.$$

Generalizzazione al tridimensionale (euclideo)

> *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Spazio euclideo***.

Si consideri un tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ nello spazio tridimensionale. La figura di lato mostra un tetraedro proiettato su un piano e indica le notazioni di vertici, facce e angoli del tetraedro:



Tetraedro: facce ed angoli diedri

- S_k la faccia opposta al vertice A_k;
- s_k la superficie di S_k;
- Δ_k il piano su cui giace S_k;
- θ_{ij} l'angolo diedro $(\widehat{\Delta_i, \Delta_j})$.

Il seno dell'angolo triedro in corrispondenza del vertice A_1 si definisce nel modo seguente:

$$\sin A_1 = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_{23} - \cos^2 \theta_{24} - \cos^2 \theta_{34} - 2\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}}}{\sin\theta_{23} \, \sin\theta_{24} \, \sin\theta_{34}};$$

E in modo analogo per gli altri angoli triedri.

Vale quindi

$$\frac{s_1}{\sin A_1} = \frac{s_2}{\sin A_2} = \frac{s_3}{\sin A_3} = \frac{s_4}{\sin A_4} = \frac{2s_1 s_2 s_3 s_4}{9V},$$

dove V è il volume del tetraedro.

Voci correlate

- Seno (matematica)
- Trigonometria
- Triangolo
- Teorema del coseno
- Teorema della corda

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **teorema dei seni (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Law_of_sines?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (**EN**) *teorema dei seni*, su *mathworld.wolfram.com*.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_dei_seni&oldid=129944024"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 15 ott 2022 alle 23:03.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Teorema del coseno

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

In geometria, il **teorema del coseno** esprime la relazione tra la lunghezza dei lati di un triangolo e il coseno di uno dei suoi angoli. Può essere considerato una generalizzazione del teorema di Pitagora al caso di triangoli non rettangoli. Questo teorema, dimostrato già dal persiano Al-Kashi, è noto anche, specialmente in Francia, come **teorema di Al-Kashi** o anche, specialmente in Italia, come **teorema di Carnot**, dal nome del matematico francese Lazare Carnot, anche se in realtà il teorema è stato reso popolare dal francese François Viète.

Indice

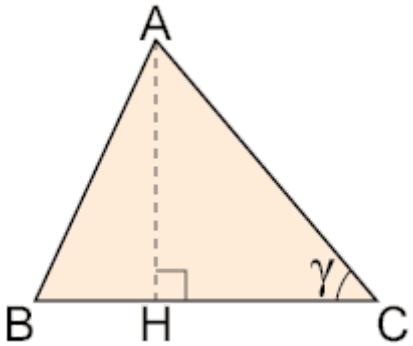
Il teorema
- Dimostrazione con il teorema di Pitagora
- Dimostrazione con vettori

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Il teorema



Con riferimento alla figura a lato, si desidera trovare la lunghezza di un lato di un qualsiasi triangolo, essendo note le lunghezze degli altri due lati e l'ampiezza dell'angolo tra essi compreso. Si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos \gamma.$$

Dimostrazione con il teorema di Pitagora

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB, si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2,$$

dove $\overline{AB}$ indica la lunghezza del segmento AB. Risolvendo il triangolo rettangolo AHC si ha anche:

$$\overline{AH} = \overline{AC} \sin \gamma.$$

Vale inoltre

$$\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} = \overline{BC} - \overline{AC}\cos\gamma.$$

Sostituendo nella prima uguaglianza si ottiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \sin^2\gamma + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \cos^2\gamma - 2\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cos\gamma.$$

Per la relazione fondamentale $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1,$ questa equazione può essere semplificata in:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cos\gamma.$$

Nel caso di un triangolo rettangolo, ossia con $\gamma = \pi/2,$ il terzo addendo del secondo membro è nullo e si ricade nel teorema di Pitagora, mentre se il triangolo è ottusangolo ($\gamma > \pi/2$) la dimostrazione procede allo stesso modo, con la differenza che in questo caso:

$$\overline{HC} = \overline{AC}\cos(\pi - \gamma) = -\overline{AC}\cos\gamma$$

e quindi si trova nuovamente

$$\overline{BH} = \overline{BC} + \overline{HC} = \overline{BC} - \overline{AC}\cos\gamma.$$

Dimostrazione con vettori

Si considerino i vettori:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC};$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{BC};$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB}.$$

Si può quindi scrivere che:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Calcolando il modulo al quadrato di ambo i membri si ottiene:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}),$$
$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b},$$

dove $\vec{a}\cdot\vec{b}$ è il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Usando infine il fatto che $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\gamma)$ si ricava

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\gamma).$$

Voci correlate

- Coseno
- Trigonometria
- Triangolo
- Teorema di Pitagora

- Teorema dei seni
- Teorema della corda

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **teorema del coseno (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Law_of_cosines?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Teorema del coseno*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Teorema del coseno*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 21832 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=21832)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_del_coseno&oldid=127753036"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 5 giu 2022 alle 14:42.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Teorema di Nepero

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

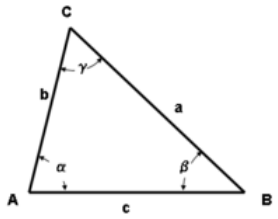
> **Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

In matematica, il **teorema di Nepero** afferma le seguenti identità, utilizzando la notazione standard per gli elementi di un triangolo:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$



Un triangolo generico con le comuni notazioni

Dimostrazione

Siano a, b, c i lati di un triangolo, e siano α, β, γ gli angoli opposti, rispettivamente.

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)^2}{(b+c)(b-c)} = \frac{a^2(b+c)^2}{a^2(b+c)(b-c)} = \frac{a^2}{b^2-c^2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2)+(a^2-b^2+c^2)}{(a^2+b^2-c^2)-(a^2-b^2+c^2)}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2$$

Per il teorema dei seni $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ e $c = 2R\sin\gamma$. Sostituendo si ottiene:

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)+(a^2-b^2+c^2)}{(a^2+b^2-c^2)-(a^2-b^2+c^2)}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 = \frac{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma)+(\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma)-(\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}\left(\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)^2 \quad (1)$$

Consideriamo il secondo membro: usando le formule di prostaferesi, la formula di duplicazione del seno e l'identità $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ diventa

$$\left(\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2$$

Consideriamo il primo addendo del numeratore del primo membro: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma$

Usando la formula di bisezione del coseno, le formule di prostaferesi, le identità $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ e $\cos(\pi/2-x)=\sin x$, otteniamo:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma = 1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta-1+\cos^2\gamma = 1-\frac{\cos 2\alpha+1}{2}-\frac{\cos 2\beta+1}{2}+\cos^2\gamma = \cos^2\gamma-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta) =$$

$$= \cos^2\gamma+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta) = \cos\gamma(\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)) = 2\cos\gamma\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

Allo stesso modo si ottiene che

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$$

Sostituendo le espressioni trovate per il primo e il secondo membro nella (1) e usando la formula di somma del seno, otteniamo

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}\left(\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2 = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}\left(\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2$$

Usando la formula di duplicazione del seno otteniamo

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}\left(\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2 = \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\left(\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2 = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Teorema di Nepero*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Teorema di Nepero*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Nepero&oldid=126763723"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 13 apr 2022 alle 01:06.

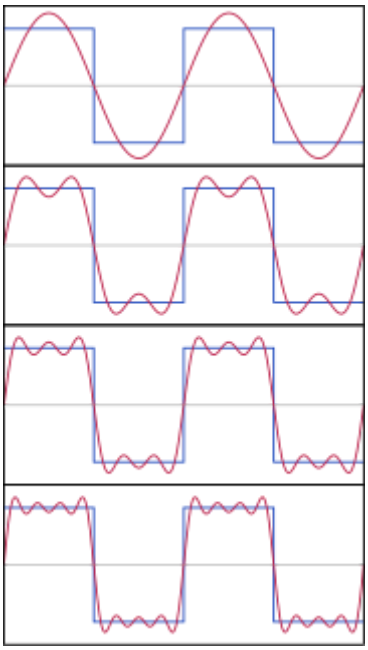
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Analisi di Fourier

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In analisi matematica, l'**analisi di Fourier**, nota anche come analisi armonica, è una branca di ricerca che ha preso avvio dalle ricerche di Jean Baptiste Joseph Fourier che, nei primi anni dell'Ottocento, riuscì a dimostrare matematicamente come una qualunque funzione periodica poteva essere scomposta in una somma di infinite "opportune" funzioni o componenti sinusoidali (seno e coseno) dette *armoniche*. Da tale constatazione nasce dunque l'idea di scomporre funzioni complicate in una serie di funzioni, nota come serie di Fourier, rendendone l'analisi più semplice e vantaggiosa. Dal concetto matematico di serie di Fourier discende anche la nozione di trasformata di Fourier ed il relativo concetto associato di dominio della frequenza.



Approssimazione della funzione onda quadra attraverso i primi quattro termini della corrispondente trasformata di Fourier

Indice

Bibliografia

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Bibliografia

- (EN) Elias M. Stein, Guido Weiss (1971): *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, ISBN 069108078X
- (EN) Levan Zhizhiashvili (1996): *Trigonometric Fourier Series and their Conjugates*, Kluwer, ISBN 0-7923-4088-4
- (EN) Audrey Terras (1999): *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-45108-6
- (EN) George Bachman, Lawrence Narici, Edward Beckenstein (2000): *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, ISBN 0-387-98899-8
- (EN) Yitzhak Katznelson (2004): *An introduction to harmonic analysis*, 3rd ed., Cambridge University Press, ISBN 0-521-83829-0; 0-521-54359-2

Voci correlate

- Trasformata di Fourier

- Serie di Fourier

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sull'**analisi di Fourier (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Fourier_analysis?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Analisi di Fourier*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 35894 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=35894) · LCCN (EN) sh85051088 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85051088) · GND (DE) 4023453-8 (https://d-nb.info/gnd/4023453-8) · BNE (ES) XX527483 (http://catalogo.bne.es/uhtbin/authoritybrowse.cgi?action=display&authority_id=XX527483) (data) (http://datos.bne.es/resource/XX527483) · BNF (FR) cb11942178c (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb11942178c) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb11942178c) · J9U (EN, HE) 987007548251005171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007548251005171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Analisi_di_Fourier&oldid=133593472"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 20 mag 2023 alle 16:12.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Metodo degli indivisibili

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Illustrazione del principio di Cavalieri: due pile di gettoni del medesimo volume tagliate da sezioni piane parallele di uguale area.

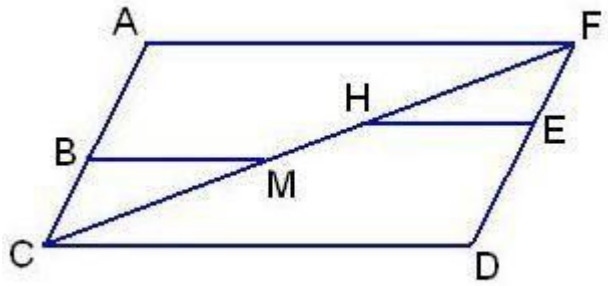
In matematica il **metodo degli indivisibili** è un procedimento introdotto negli anni successivi al 1640 da Bonaventura Cavalieri per il calcolo di aree e volumi e che ha contribuito allo sviluppo del calcolo integrale. Esso si può far derivare dal **principio di Cavalieri**:

"*Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.*"

Questo enunciato, noto anche come *principio di Cavalieri degli indivisibili*, contiene in sé elementi base del calcolo integrale. Il termine usato da Cavalieri, **indivisibile**, potrebbe tradursi con l'espressione moderna di *figura geometrica di spessore infinitesimo*. Per cercare di giustificare questa affermazione osserviamo come egli *dimostrò un teorema* che, utilizzando la notazione del calcolo infinitesimale, è equivalente alla formula moderna:

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Vediamolo nel piano, nel caso $n = 1$: per dimostrare questa formula egli confrontava le potenze dei segmenti di un parallelogramma paralleli alle basi con le corrispondenti potenze dei segmenti dell'uno o dell'altro dei due triangoli in cui la diagonale divide il parallelogramma.



Il parallelogramma $AFDC$ viene diviso dalla diagonale CF in due triangoli e si considera il segmento HE chiamandolo *indivisibile* del triangolo CDF parallelo alla base CD. Prendendo $BC = FE$ e tracciando BM parallelo a CD si individua un *indivisibile* BM del triangolo ACF il quale è sovrapponibile a HE e quindi equivalente ad esso.

È possibile accoppiare tutti gli indivisibili contenuti nel triangolo CDF con i corrispondenti indivisibili uguali contenuti nel triangolo ACF; i due triangoli hanno dunque aree uguali. Poiché il parallelogramma è la *somma* degli indivisibili contenuti nei due triangoli, è chiaro che la somma delle prime potenze dei segmenti contenuti in uno dei due triangoli componenti è uguale alla metà della somma delle prime potenze dei segmenti contenuti nel parallelogramma: in termini moderni: : $\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$.

Con ragionamenti simili Cavalieri dimostrò che la *somma* dei quadrati dei segmenti in un triangolo era 1/3 della *somma* dei quadrati contenuti nel parallelogramma; per i cubi mostrò che il rapporto era 1/4, fino a giungere nel 1647 all'enunciato generale per le potenze n-esime.

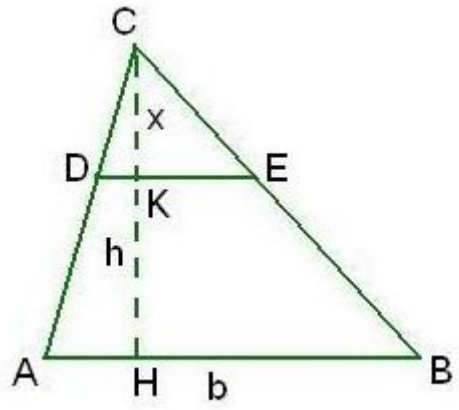
Questo teorema aprì la strada a numerosi procedimenti di calcolo effettivo (algoritmi) di aree e volumi, procedimenti successivamente inquadrati nel calcolo infinitesimale.

Si possono fare alcuni esempi di calcolo utilizzando il metodo degli indivisibili: si è visto come Cavalieri considerò una figura piana convessa come costituita dalle infinite corde che essa intercetta su un fascio di rette parallele e, successivamente, ciascuna di queste corde come un rettangolo avente per base la corda e un'altezza piccolissima (in linguaggio moderno ogni indivisibile è rappresentato dal prodotto $f(x)dx$, che rappresenta l'area del rettangolo di base $f(x)$ e altezza dx). Allo stesso modo considerò un solido convesso come costituito dalle sezioni con un sistema di piani paralleli chiamando indivisibile il cilindro avente come base la sezione e altezza piccolissima.

Indice

Esempio 1: Area del triangolo
Esempio 2: Volume del cono
Esempio 3: Volume della sfera
Bibliografia
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Esempio 1: Area del triangolo



Un indivisibile è una corda parallela alla base. L'indivisibile distante x dal vertice si può scrivere in funzione di x (ossia è una $f(x)$).

Per la similitudine dei triangoli ACB e DCE si ha:

$$AB : CH = DE : CK$$

cioè

$$b : h = f(x) : x$$

allora

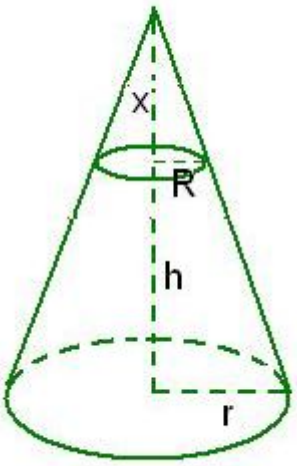
$$f(x) = \frac{b \cdot x}{h}.$$

L'area dell'indivisibile è $\frac{b \cdot x}{h}\,dx$. L'area di ABC è la somma delle aree degli indivisibili così ottenuti, al variare di x da 0 a h, cioè:

$$\int_0^h \frac{b}{h} \cdot x\,dx = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h x\,dx = \frac{b}{h} \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

che è la nota formula dell'area del triangolo.

Esempio 2: Volume del cono



Un indivisibile è un cerchio parallelo alla base, distante x dal vertice, di raggio $R\,(= f(x))$.

Per similitudine si ha:

$$r : h = f(x) : x$$

da cui si ottiene

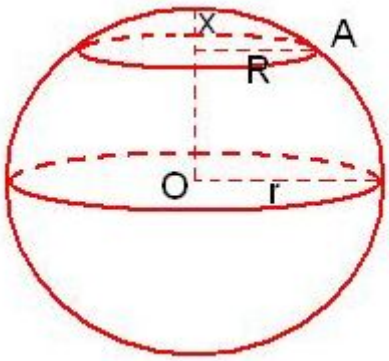
$$f(x) = \frac{r}{h} \cdot x.$$

Il volume di tale indivisibile è quello del cilindro di raggio di base R e altezza dx: Il volume del cono è dato dalla somma di tutti gli indivisibili così ottenuti, al variare di x da 0 a h, cioè:

$$\int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2\,dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Esempio 3: Volume della sfera

Un indivisibile, un cerchio parallelo al cerchio massimo, distante x dalla superficie sferica, ha raggio R che si può calcolare utilizzando il teorema di Pitagora:



$$R^2 = r^2 - (r - x)^2 = 2rx - x^2.$$

Il volume dell'indivisibile è quello del cilindro con lo stesso raggio di base e altezza dx:

$$\pi(2rx - x^2)\,dx.$$

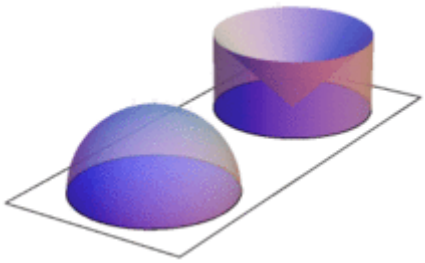
Il volume della sfera è il doppio della somma di tutti gli indivisibili così ottenuti al variare di x da 0 a r, cioè:

$$2\int_0^r \pi(2rx - x^2)\,dx = 4\pi r \int_0^r x\,dx - 2\pi \int_0^r x^2\,dx = 4\pi r \frac{r^2}{2} - 2\pi \frac{r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Il volume della semisfera è

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$$

cioè è la differenza tra il volume di un cilindro e di un cono aventi entrambi raggio di base e altezza uguale al raggio della sfera; sezionando i tre solidi con un medesimo piano variabile, si trovano tre aree di cui quella del cilindro è la somma delle altre due.



Semisfera e solido con sezioni della stessa area

Su questi calcoli sono fondati i calcoli del volume della sfera di Galileo e Torricelli.

Bibliografia

- (LA) Bonaventura Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, Bologna, Monti, 1647.
- (EN) Enrico Giusti, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Bologna, Cremonese, 1980.
- Amir Alexander, *Infinitamente piccoli. La teoria matematica alla base del mondo moderno*, Torino, Codice edizioni, 2015, ISBN 978-887578544-4.
- Umberto Bottazzini, *Infinito*, Bologna, il Mulino, 2018, ISBN 978-88-15-26735-1.

Voci correlate

- Problema dell'anello portatovagliolo

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **metodo degli indivisibili (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cavalieri%27s_principle?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- *Cavalieri, principio di*, in *Enciclopedia della Matematica*, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 2013.
- (EN) *Metodo degli indivisibili*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Cavalieri's Principle*, in *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38943 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38943)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Metodo_degli_indivisibili&oldid=125665840"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 12 feb 2022 alle 10:59.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.